

建立一种适用于不同被控对象、不同控制目标的通用控制方法显然是不现实的。结合被控对象的结构和动态特性，综合运用反馈和关联的手段和前述理论工具有助于分类解决不同非线性控制问题。

本章探讨如何结合被控对象的结构来设计控制器并介绍几种基本的非线性控制方法：反馈线性化、滑模控制、反步法、前推法。

5.1 反馈线性化

针对线性系统的控制理论已经发展得十分成熟。如果能够通过适当的线性化处理将非线性被控对象描述为线性模型，那么就能够使用线性控制手段来解决非线性控制问题。对于非线性系统，最直接的线性化方法是一次近似（见附录 A.2），但所得出的线性模型仅能保证在局部范围内有足够小的建模误差。当要求控制系统的工作范围更大或控制精度更高时，近似线性化方法通常不再有效。

本节介绍反馈线性化方法，其能够通过状态变换和反馈控制实现更大范围的精确线性化。在反馈线性化的基础上，能够进一步利用线性控制的手段对非线性被控对象实现大范围、高精度的控制。

5.1.1 基本思想

首先通过两个例子来介绍反馈线性化的基本思想。

例 5.1 (单摆摆角控制：近似线性化和反馈线性化) 将 1.1.1 节的单摆模型(1.3)重写如下：

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin\theta - k\dot{\theta} + T \quad (5.1)$$

以 T 作为控制输入，期望设计状态反馈控制器使闭环系统在摆角 $\theta = \theta_0$ （其中 θ_0 为常数）所对应的平衡点处全局渐近稳定。为便于讨论，记

$$x_1 = \theta - \theta_0, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad u = T \quad (5.2)$$

可得被控对象模型:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.3)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1 + \theta_0) - \frac{k}{ml^2} x_2 + \frac{1}{ml^2} u \quad (5.4)$$

该被控对象模型是非线性的。

首先考虑在期望工作点(即原点)处对由式(5.3)和式(5.4)定义的被控对象模型作近似线性化,可以得到如下(动力学带有零点偏移的)线性模型:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.5)$$

$$\dot{x}_2 \approx -\frac{g}{l} \cos \theta_0 x_1 - \frac{k}{ml^2} x_2 + \frac{1}{ml^2} u - \frac{g}{l} \sin \theta_0 \quad (5.6)$$

如果该模型足够准确,那么只需取 $u \equiv 0$ 就能保证单摆系统在下止点对应的平衡点(相应的期望摆角 $\theta_0 = 0$) 处全局渐近稳定。然而,事实显然不是这样。当 $u \equiv 0$ 时,单摆甚至能够在上止点处维持不动。可以看出,近似线性化只能保证所得到的模型在局部范围内近似有效。

与近似线性化不同,另一种处理方式是设计控制器来精确地抵消掉被控对象动力学中的非线性项,并进而采用线性控制方法来解决控制问题。针对由式(5.3)和式(5.4)定义的被控对象模型,考虑如下形式的控制器

$$u = mgl \sin(x_1 + \theta_0) + v \quad (5.7)$$

其中, v 是新的等效控制输入。将该控制器代入被控对象模型,可得线性模型

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.8)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{ml^2} x_2 + \frac{1}{ml^2} v \quad (5.9)$$

显然,控制器(5.7)中的非线性项 $mgl \sin(x_1 + \theta_0)$ 抵消掉了由式(5.3)和式(5.4)定义的被控对象模型中的相同项。在得到如式(5.8)和式(5.9)所示的线性模型的基础上,可以进一步应用线性控制方法。比如,如果 $k > 0$,那么只需将等效控制输入 v 取作

$$v = -cx_1 \quad (5.10)$$

其中, c 是正的常数,就能保证闭环系统在原点处全局渐近稳定。

需要注意的是,以上基于非线性抵消的控制器是由非线性抵消部分(见式(5.7))和负反馈部分(见式(5.10))组成的,即

$$u = mgl \sin(x_1 + \theta_0) - cx_1 \quad (5.11)$$

图 5-1 所示为相应的闭环系统框图。

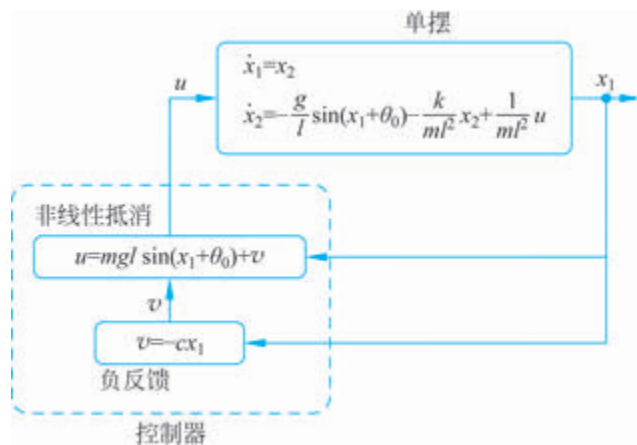


图 5-1 基于非线性抵消的闭环控制系统框图

上面的例子在控制器中引入非线性项直接抵消了被控对象动力学中的非线性项。但是，对于许多非线性被控对象，单纯使用这一手段还不足以实现线性化，而需要将非线性坐标变换与非线性抵消相结合。

例 5.2 (非线性坐标变换和线性化) 考虑被控对象：

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1 \sin x_1 \quad (5.12)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.13)$$

其中， $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态， $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入。被控对象动力学中的非线性项 $x_1 \sin x_1$ 出现在 x_1 -子系统中，但由于控制输入 u 并不直接作用于 x_1 -子系统，因此不能直接在控制器中引入相同的非线性项来抵消它。不过，将非线性的控制器与非线性的坐标变换相结合，仍然能够将该被控对象转化为一个等价的线性模型。考虑坐标变换

$$z_1 = x_1 \quad (5.14)$$

$$z_2 = \dot{x}_1 = x_2 + x_1 \sin x_1 \quad (5.15)$$

对 z_1 和 z_2 求导可得等价的被控对象模型：

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (5.16)$$

$$\dot{z}_2 = u + z_2(\sin z_1 + z_1 \cos z_1) \quad (5.17)$$

为变换后如式(5.16)和式(5.17)所示的被控对象模型设计控制器

$$u = v - z_2(\sin z_1 + z_1 \cos z_1) \quad (5.18)$$

来抵消非线性项，其中 v 是新的等效控制输入。这样，由式(5.12)和式(5.13)描述的原非线性被控对象的控制问题就最终被转化为如下二阶积分器的控制问题：

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (5.19)$$

$$\dot{z}_2 = v \quad (5.20)$$

如果进一步取

$$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 \quad (5.21)$$

能够得到闭环系统

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (5.22)$$

$$\dot{z}_2 = -k_1 z_1 - k_2 z_2 \quad (5.23)$$

其在原点处全局渐近（指数）稳定。图 5-2 所示为上述闭环系统的框图。

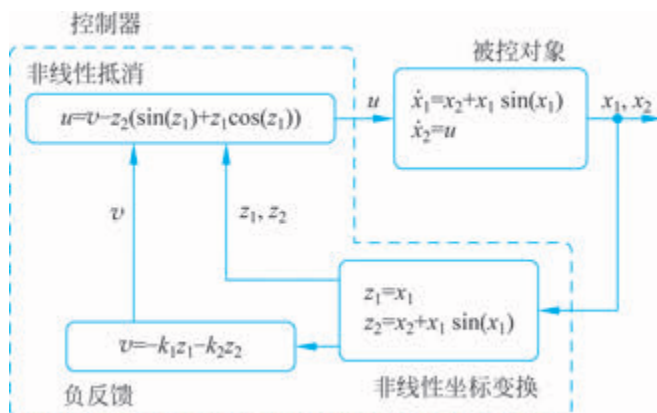


图 5-2 基于非线性坐标变化和非线性抵消的闭环控制系统框图

5.1.2 输入-输出线性化

例 5.2 将 $z_1 = x_1$ 和其导数 $z_2 = \dot{x}_1$ 看作新的状态，并在控制器中引入与被控对象动力学对应的非线性项，最终得到了与原被控对象模型等价的线性模型。也可以将例 5.2 中的非线性坐标变换（见式(5.14)和式(5.15)）看作对输出 x_1 不断求导直到控制输入 u 出现的过程。这也是输入-输出线性化的基本过程。

本节结合如下单输入-单输出非线性被控对象来介绍输入-输出线性化的一般过程：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u \quad (5.24)$$

$$y = h(\boldsymbol{x}) \quad (5.25)$$

其中， $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ 是状态， $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入， $y \in \mathbb{R}$ 是输出， $\boldsymbol{f}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{g}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 表示被控对象的动力学， $h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ 表示输出映射。在状态空间 \mathbb{R}^n 中，连通的开集 \mathcal{D} 表示将要实施输入-输出线性化的区域。假设 \boldsymbol{f} 、 \boldsymbol{g} 、 h 在 \mathcal{D} 上都是充分光滑的³⁶，以此来保

³⁶所谓充分光滑，是指函数具备足够高阶的导数。

证能够实施输入-输出线性化的高阶求导过程。

与例 5.2 一致, 输入-输出线性化的基本过程是: 不断求取被控对象的输出 y 对时间 t 的更高阶导数直至控制输入 u 出现, 然后引入新的等效控制输入 v 并通过状态反馈抵消非线性项, 最终得到从等效控制输入 v 到输出 y 的串联积分器模型。

第 1 步, 求 y 对时间 t 的导数, 可得

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u) \quad (5.26)$$

为简化表示, 记

$$L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (5.27)$$

并将其称作函数 h 相对于向量场³⁷ \mathbf{f} 的李导数。直观上, $L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})$ 表示的是 $y = h(\mathbf{x})$ 沿系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的轨迹随时间的变化率。同样, 记

$$L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (5.28)$$

利用李导数表示, 将式(5.26)重写为

$$\dot{y} = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})u \quad (5.29)$$

如果 $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = 0$, 那么

$$\dot{y} = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) \quad (5.30)$$

此时 \dot{y} 不受 u 的直接作用, 就继续求取 \dot{y} 相对时间 t 的导数。

第 2 步, 求 \dot{y} 对时间 t 的导数, 可得

$$\ddot{y} = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u) \quad (5.31)$$

引入高阶李导数表示:

$$L_{\mathbf{f}}^1 h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) \quad (5.32)$$

$$L_{\mathbf{f}}^p h(\mathbf{x}) = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}^{p-1}h(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (5.33)$$

同时, 使用 $y^{(p)}$ 表示 y 对时间 t 的第 p 阶导数。那么, 可以将式(5.31)等价地写成

$$y^{(2)} = L_{\mathbf{f}}^2 h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})u \quad (5.34)$$

如果 $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = 0$, 那么

$$y^{(2)} = L_{\mathbf{f}}^2 h(\mathbf{x}) \quad (5.35)$$

这说明 $y^{(2)}$ 亦不受 u 的直接作用, 于是就继续求取 $y^{(2)}$ 相对时间 t 的导数。

第 i 步, 求 $y^{(i-1)}$ 对时间 t 的导数, 可得

³⁷ 向量取值的函数 $\mathbf{f}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 被称作 \mathcal{D} 上的一个向量场。

$$y^{(i)} = L_f^i h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{i-1} h(\mathbf{x}) u \quad (5.36)$$

如果将 $L_g h(\mathbf{x})$ 写成 $L_g L_f^0 h(\mathbf{x})$, 那么前面从第 1 步开始每一步的求导结果均具有式(5.36)的形式。

终止求导, 如果在第 ρ 步时 $L_g L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x}) \neq 0$, 那么就终止不断求取 y 相对时间 t 的更高阶导数的过程。此时,

$$y^{(\rho)} = L_f^\rho h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x}) u \quad (5.37)$$

非线性抵消, 针对式(5.37), 在控制器中引入非线性抵消:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x})} (-L_f^\rho h(\mathbf{x}) + v) \quad (5.38)$$

将控制器(5.38)代入式(5.37), 可得

$$y^{(\rho)} = v \quad (5.39)$$

这样, 通过不断求取输出 y 相对时间 t 的导数并在控制输入 u 出现后抵消剩余的非线性动力学, 最终从非线性被控对象模型(见式(5.24)和式(5.25))得到了一个由 ρ 个积分器串联而成的线性模型(5.39), 其中 v 是新的等效控制输入。只要已知被控对象的精确模型和状态, 就能实施该过程。

例 5.3 (受控范德波尔方程的输入-输出线性化) 考虑由范德波尔方程描述的被控对象:

$$\ddot{y} + \mu(y^2 - 1)\dot{y} + y = u \quad (5.40)$$

其中, $y \in \mathbb{R}$ 是输出, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, 常数 $\mu > 0$ 。

取 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, 并记 $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ 。那么, 可以将被控对象模型(5.40)等价地写成

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (5.41)$$

$$y = h(\mathbf{x}) \quad (5.42)$$

其中,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - \mu(x_1^2 - 1)x_2 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

$$h(\mathbf{x}) = x_1 \quad (5.45)$$

不难验证,

$$L_g L_f^0 h(\mathbf{x}) = 0, \quad L_g L_f^1 h(\mathbf{x}) = 1 \quad (5.46)$$

$$L_f^2 h(\mathbf{x}) = -x_1 - \mu(x_1^2 - 1)x_2 \quad (5.47)$$

参考前述的反馈线性化过程, 使用控制器

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{L_g L_f^1 h(\mathbf{x})} (-L_f^2 h(\mathbf{x}) + v) \\ &= x_1 + \mu(x_1^2 - 1)x_2 + v \end{aligned} \quad (5.48)$$

就可以将被控对象模型(5.40)转化为两个积分器串联(二阶积分器)的形式:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = v, \quad y = x_1 \quad (5.49)$$

输入-输出线性化同样适用于输出变量维数大于一的情形。

例 5.4 (差速驱动小车模型的动态反馈线性化) 将差速驱动小车模型(1.26)重写如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

如果控制目标是使小车到达某一特定位置或者是沿某一特定轨迹运动, 那么可以将

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

看作输出, 并考虑对模型(5.50)作输入-输出线性化处理。首先, 求 \mathbf{p} 相对时间 t 的导数, 可得

$$\dot{p}_x = v \cos \theta \quad (5.52)$$

$$\dot{p}_y = v \sin \theta \quad (5.53)$$

尽管此时出现了一个控制量 v , 但是如果单纯将 v 看作控制输入, 那么由式(5.52)和式(5.53)描述的系统并不完全可控。直观而言, 任意给定 θ , 线速度 v 只能调整小车的运动速度而不能改变其运动方向。

要想使状态分量 θ 对应的控制量 ω 也显现出来, 需考虑继续对 \dot{p}_x 和 \dot{p}_y 求导。为了实施这一过程, 不失一般性地要求 v 相对于时间 t 可导, 并定义

$$\dot{v} = u \quad (5.54)$$

在此基础上, 可以得到

$$\ddot{p}_x = \dot{v} \cos \theta - v \sin \theta \dot{\theta} = \cos \theta u - v \sin \theta \omega \quad (5.55)$$

$$\ddot{p}_y = \dot{v} \sin \theta + v \cos \theta \dot{\theta} = \sin \theta u + v \cos \theta \omega \quad (5.56)$$

或将其写成如下紧凑形式

$$\begin{bmatrix} \ddot{p}_x \\ \ddot{p}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

在保证 $v \neq 0$ 的前提下, 可以设计如下控制器:

$$\begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

其中, u_x 和 u_y 是新的等效控制输入。将控制器(5.58)代入转化后的被控对象模型(5.57), 可得

$$\begin{bmatrix} \ddot{p}_x \\ \ddot{p}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

以上就是对差速驱动小车模型实施反馈线性化的过程。

上述反馈线性化过程将线速度的导数 u 作为一个新的控制分量, 将小车在全局正交坐标系中定义的位置 (p_x, p_y) 和速度 (\dot{p}_x, \dot{p}_y) 看作新的状态, 最终将原模型(5.50)转化为二阶积分器的形式。由于引入了动态的积分过程(见式(5.54)), 这种方法也被称作动态反馈线性化^{38[265]}。图 5-3 所示为实施动态反馈线性化后的控制系统框图。

需要注意的是, 上述动态反馈线性化过程中的非线性抵消环节(见式(5.58))要求线速度 v 不过零。因此, 要保证所得到的二阶积分器模型(5.59)的有效性, 在其基础上设计控制器时要保证线速度 v 在整个控制过程中都不过零。这一点可以通过保证 (\dot{p}_x, \dot{p}_y) 的有界性并进而保证 v 和 θ 的有界性来实现。

如果控制目标对小车的方向角没有要求, 那么还可以使用另外一种降维的反馈线性化方法。如图 5-4 所示, 考虑小车两轮连线中垂线上与两轮连线中点的距离为 l 的点(常数 $l > 0$), 将该点的位置记作 (p'_x, p'_y) , 其满足

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

将

³⁸动态反馈线性化指的是对非线性被控对象设计动态控制器, 使得闭环系统能够通过可逆的坐标变换转化为线性系统^[260-264]。

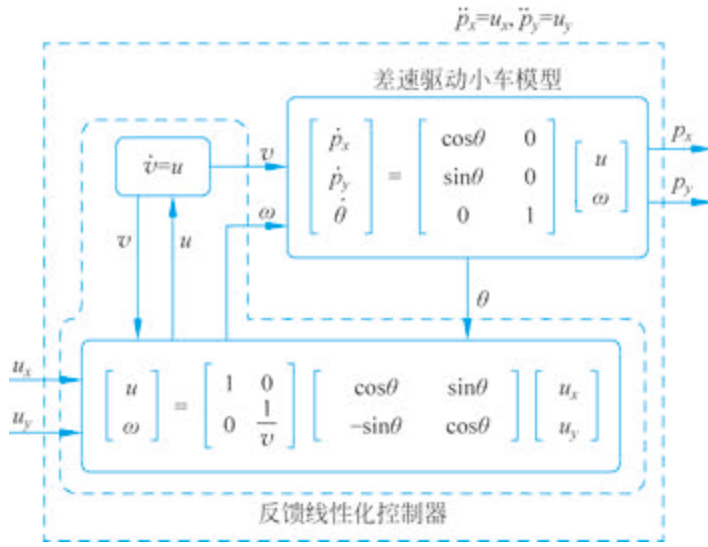


图 5-3 实施动态反馈线性化后的控制系统框图

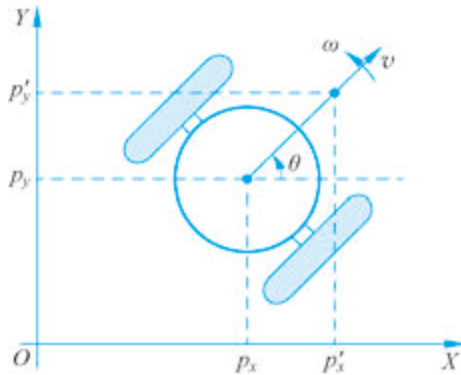


图 5-4 以偏移的中心点作为输出的差速驱动小车模型

$$p' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} \tag{5.61}$$

看作新的输出。对 p'_x 和 p'_y 求导并利用小车模型(5.50)，可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{p}'_x \\ \dot{p}'_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \dot{\theta} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -l\sin\theta \\ \sin\theta & l\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.62}$$

在此基础上, 取

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{l} & \frac{\cos \theta}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_x \\ u'_y \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

可得

$$\begin{bmatrix} \dot{p}'_x \\ \dot{p}'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_x \\ u'_y \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

上述变换过程将所关注的小车的位置由两轮连线的中点向前移动了距离 l , 进而通过线性化的手段得出了一阶积分器模型。图 5-5 所示为实施基于中心点偏移的反馈线性化后的控制系统框图。

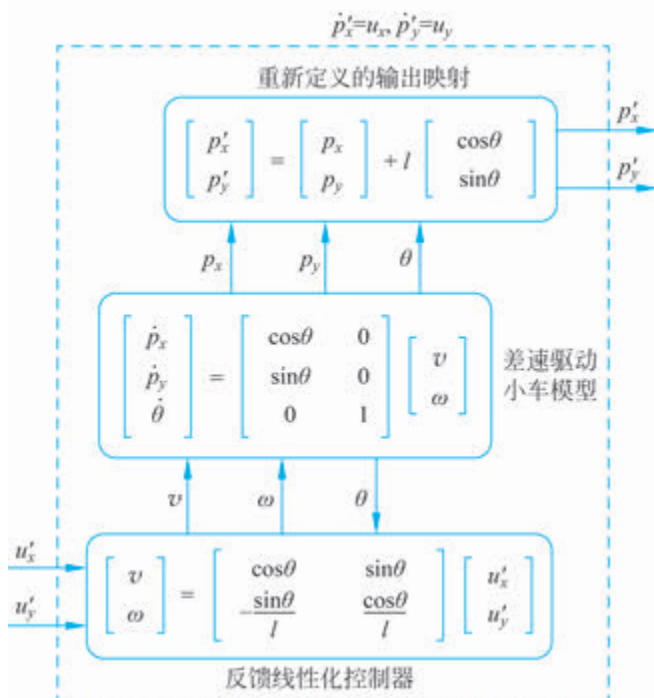


图 5-5 实施基于中心点偏移的反馈线性化后的控制系统框图

需要注意的是, 基于中心点偏移的反馈线性化损失了小车的方向信息。即使能够很好地控制位置 (p'_x, p'_y) , 也难以保证方向角 θ 趋近于期望的值。同时, 这种转化方法也难以精确地控制原本关注的两轮连线的中点位置 (p_x, p_y) 。此外, 这种转化本质上是通过对偏移点 (p'_x, p'_y) 的运动来同时刻画小车的前后运动和左右方向变化。当考虑小车前后和左右运动能力限制时 (比如线速度变化率和方向角速率饱和), 只能将两者中最为保守的限制作

为总体运动能力的上限。这显然不利于发挥小车的最大运动能力。当然，这种处理方式的一个好处是简便易实现。

对二维平面上运动的差速驱动小车作反馈线性化的思想可以被推广到三维空间中运动的固定翼飞行器。

例 5.5 (固定翼飞行器航迹动力学模型的动态反馈线性化) 将 1.1.8 节给出的固定翼飞行器航迹运动学模型重写如下：

$$\dot{x} = v \cos \chi \cos \gamma \quad (5.65)$$

$$\dot{y} = v \sin \chi \cos \gamma \quad (5.66)$$

$$\dot{h} = v \sin \gamma \quad (5.67)$$

$$\dot{\chi} = \frac{g n \sin \mu}{v \cos \gamma} \quad (5.68)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{g}{v} (n \cos \mu - \cos \gamma) \quad (5.69)$$

相关变量的定义见 1.1.8 节。对于该被控对象模型，线速度 v 、滚转角 μ 和过载 n 是控制输入。

该模型能够实现动态反馈线性化。具体而言，将线速度 v 视作一个新的状态分量，并定义

$$\dot{v} = v^d \quad (5.70)$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_h \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi \\ \cos \gamma \sin \chi \\ \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_h \end{bmatrix} = \Phi(\chi, \gamma) \begin{bmatrix} v^d \\ u_\chi \\ u_\gamma \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

其中，

$$\Phi(\chi, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi & -\sin \chi & -\sin \gamma \cos \chi \\ \cos \gamma \sin \chi & \cos \chi & -\sin \gamma \sin \chi \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

$$u_\chi = gn \sin \mu \quad (5.74)$$

$$u_\gamma = g(n \cos \mu - \cos \gamma) \quad (5.75)$$

这样就能得到线性化的模型

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{v}_x = u_x \quad (5.76)$$

$$\dot{y} = v_y, \quad \dot{v}_y = u_y \quad (5.77)$$

$$\dot{h} = v_h, \quad \dot{v}_h = u_h \quad (5.78)$$

图 5-6 以控制系统框图的形式展示了上述动态反馈线性化的过程。

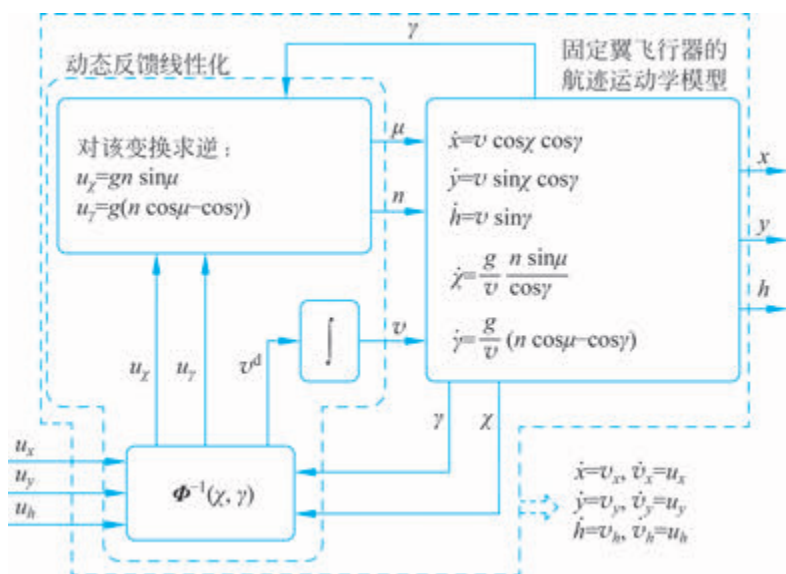


图 5-6 对固定翼飞行器航迹运动学模型的动态反馈线性化

显然，上述动态反馈线性化需要根据如式(5.72)、式(5.74)、式(5.75)所示的变换作从 u_x 、 u_y 、 u_h 到 v^d 、 μ 、 n 的逆运算。不难验证， $\Phi^{-1}(\chi, \gamma) = \Phi^T(\chi, \gamma)$ 。然而，从 u_x 和 u_γ 求解 n 和 μ 的结果不是唯一的。直观而言，这是由过载 n 的方向和滚转角 μ 之间定义的不唯一所导致的。从模型上来看，正过载/正飞 ($n = 1, \mu = 0$) 和负过载/倒飞 ($n = -1, \mu = \pi$) 产生的效果是完全相同的。实现控制算法时，可根据过载 n 的实际最大范围以及当前过载方向来确定所采用的控制量。此外，上述变换过程得以实施的前提是线速度不过零。这一点可以通过在控制器中引入适当的饱和环节来保证。当然，绝大多数固定翼飞行器在正常飞行过程中首先要保证线速度远大于零才能避免失速。

复杂的控制任务常常通过非线性的输出映射来刻画。输入-输出线性化将输出作为第一组状态分量，通过对输出求导来定义其他新的状态分量并刻画控制输入的作用，有助于解决由非线性输出映射描述的复杂控制问题。一个典型例子是安全控制：将安全指标函数

作为输出映射, 利用输入-输出线性化的思想对安全指标函数求导, 能够建立从控制量到安全指标的关系, 并构造安全的控制量集合。

例 5.6 (高阶非线性被控对象的安全控制) 考虑控制-仿射型被控对象:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u \quad (5.79)$$

其中, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是光滑的函数。一类典型的安全控制问题关注如何调整控制量使被控对象状态保持在如下形式的安全集 S 中:

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : h(\boldsymbol{x}) \geq 0\} \quad (5.80)$$

此处, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑的安全指标函数。

直接将安全指标函数值 $h(\boldsymbol{x})$ 视作被控对象的输出, 并记

$$y = h(\boldsymbol{x}) \quad (5.81)$$

假设

$$L_{\boldsymbol{g}}L_{\boldsymbol{f}}^{i-1}h(\boldsymbol{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1 \quad (5.82)$$

$$L_{\boldsymbol{g}}L_{\boldsymbol{f}}^{\rho-1}h(\boldsymbol{x}) \neq 0 \quad (5.83)$$

借助输入-输出线性化的思想, 对输出 y 求导^[266], 可得

$$y^{(\rho)} = L_{\boldsymbol{f}}^{\rho}h(\boldsymbol{x}) + L_{\boldsymbol{g}}L_{\boldsymbol{f}}^{\rho-1}h(\boldsymbol{x})u \quad (5.84)$$

在此基础上, 取等效的控制输入

$$v = L_{\boldsymbol{f}}^{\rho}h(\boldsymbol{x}) + L_{\boldsymbol{g}}L_{\boldsymbol{f}}^{\rho-1}h(\boldsymbol{x})u \quad (5.85)$$

也就是设计控制器

$$u = \frac{1}{L_{\boldsymbol{g}}L_{\boldsymbol{f}}^{\rho-1}h(\boldsymbol{x})}(-L_{\boldsymbol{f}}^{\rho}h(\boldsymbol{x}) + v) \quad (5.86)$$

就能将原被控对象(5.79)的安全控制问题转化为如下串联积分器被控对象的控制问题:

$$y^{(\rho)} = v \quad (5.87)$$

只要设计控制器使 $y = h(\boldsymbol{x})$ 在特定初始条件下保持非负, 就能使被控对象状态保持在安全集 S 中。

借助与输入-输出线性化类似的思想, 能够将机器人在构型空间 (configuration space) 中的运动变换到工作空间 (work space), 进而直接在工作空间中解决控制问题。

例 5.7 (▲ 机械臂在构型空间和工作空间中的运动) 考虑机械臂的动力学模型:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (5.88)$$

其中，各个变量和函数的定义与 1.3.3 节相同。

机械臂的控制任务往往不是以 \mathbf{q} 为变量定义在构型空间中，而是定义在机械臂本身所处的物理工作空间中。此处的空间可以理解为特定的区域，其不一定满足数学上对空间的定义³⁹。比如，一种典型的控制任务是要求机械臂的末端作动器（end effector）在其工作空间中按照要求的方式动作。由于受到本身臂长、转角范围、工作环境等限制，机械臂的末端作动器运动通常被限制在一个有限的范围中。

针对机械臂在工作空间中的控制问题，一种解决方式是将末端作动器的期望运动转化为转角的期望运动，之后通过控制转角来达到控制末端作动器的目的。但是，这种方式必须求解逆运动学，需要较大的计算量才能完成，且求拟过程中容易放大运算误差。不仅如此，许多在工作空间中定义的复杂任务（比如工作空间中的约束满足问题）常常难以直接映射到构型空间。因此，期望通过一种更直接的方式来解决工作空间中的控制问题。

将机械臂在工作空间中的状态分量看作输出，利用反馈线性化的思想对输出求导就得到其在工作空间的动力学，从而能够直接对工作空间中的变量作反馈来解决控制问题^[31]。

图 5-7 所示为一个两关节机械臂的工作空间与构型空间的对应关系。

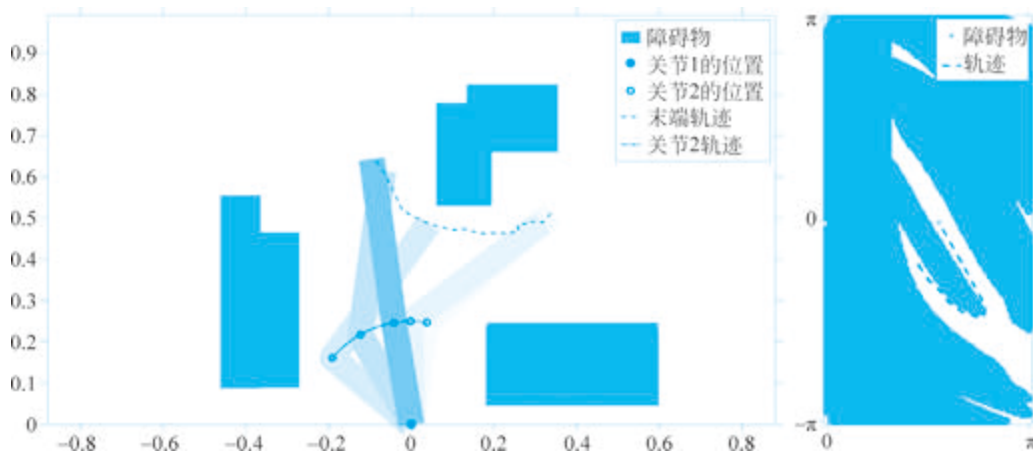


图 5-7 一个两关节机械臂的工作空间与构型空间的对应关系

考虑从构型空间到工作空间的映射：

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{q}) \quad (5.89)$$

其中， $\mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是光滑且可逆的函数。对 \mathbf{y} 求导可得

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (5.90)$$

其中，

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (5.91)$$

³⁹关于构型空间和工作空间的定义，见文献[267, 第 2 章]。

在 $J(q)$ 可逆的范围内, 定义 $\check{J}(q) = J^{-1}(q)$ 。于是

$$\dot{q} = \check{J}(q)\dot{y} \quad (5.92)$$

$$\ddot{q} = \check{J}(q)\ddot{y} + \frac{d}{dt}\check{J}(q)\dot{y} \quad (5.93)$$

将其代入机械臂的动力学方程(5.88), 可得

$$\begin{aligned} & \check{J}^T(q)H(q)\check{J}(q)\ddot{y} + \left(\check{J}^T(q)C(q, \dot{q})\check{J}(q) + \check{J}^T(q)H(q)\frac{d}{dt}\check{J}(q) \right) \dot{y} + \check{J}^T(q)g(q) \\ & = \check{J}^T(q)\tau \end{aligned} \quad (5.94)$$

在此基础上, 定义

$$\tilde{H}(q) = \check{J}^T(q)H(q)\check{J}(q) \quad (5.95)$$

$$\tilde{C}(q, \dot{q}) = \check{J}^T(q) \left(C(q, \dot{q})\check{J}(q) + H(q)\frac{d}{dt}\check{J}(q) \right) \quad (5.96)$$

$$\tilde{g}(q) = \check{J}^T(q)g(q) \quad (5.97)$$

$$\tilde{\tau}(q, \tau) = \check{J}^T(q)\tau \quad (5.98)$$

于是, 就可以将新的动力学模型方程(5.94)写作

$$\tilde{H}(q)\ddot{y} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{y} + \tilde{g}(q) = \tilde{\tau}(q, \tau) \quad (5.99)$$

这样就得到了以工作空间中定义的变量 (y, \dot{y}) 作为状态的机械臂动力学模型。不仅如此, 仍然能够验证上面定义的 $\tilde{H}(q)$ 是正定对称的, 并且 $\dot{\tilde{H}}(q) - 2\tilde{C}(q, \dot{q})$ 是反对称矩阵。也就是说, 仍然能够使用针对原模型(5.88)的控制方法来处理转化后的模型(5.99)。基于转化后的模型来设计控制器, 计算出新控制量 $\tilde{\tau}$, 之后再通过(5.98)作反变换就能得到真正施加于机械臂上的控制量 τ 。

5.1.3 相对阶、零动态、最小相位

在 5.1.2 节对由式(5.24)和式(5.25)定义的系统的输出 y 多次求导的过程中, 一旦在第 ρ 步出现 u 就终止求导, 然后通过非线性抵消得到了串联积分器模型(5.39)。

既然对输出 y 求导 ρ 次就能使控制输入 u 显现出来, 那么可以直观地认为 y 相对于 u 的阶次是 ρ , 并将 ρ 称作相对阶。

定义 5.1 (相对阶) 考虑由式(5.24)和式(5.25)定义的系统如果存在一个整数 ρ , 满足 $1 \leq \rho \leq n$ 且对所有 $x \in \mathcal{D}$ 都有

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1 \quad (5.100)$$

$$L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0 \quad (5.101)$$

那么称该系统在 \mathcal{D} 上的相对阶是 ρ 。

相对阶的概念对线性系统而言更加直观。

例 5.8 (线性时不变系统的相对阶) 考虑由传递函数描述的线性系统:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} \quad (5.102)$$

其中, U 和 Y 分别是控制输入 $u \in \mathbb{R}$ 和被控输出 $y \in \mathbb{R}$ 的拉普拉斯变换, s 表示拉普拉斯变换算子, a_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 和 b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 均为实常数, 且 $b_m \neq 0$ 。

假设传递函数(5.102)的分子和分母多项式是互质的。那么, 该传递函数的一个最小实现是

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u \quad (5.103)$$

$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \quad (5.104)$$

其中,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.105)$$

$$\boldsymbol{C} = [b_0, b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0] \quad (5.106)$$

对照定义 5.1 中的条件(5.100)和条件(5.101), 可以验证

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \cdots = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-m-2}\boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-m-1}\boldsymbol{B} \neq 0 \quad (5.107)$$

因此, 该系统的相对阶是 $\rho = n - m$, 同时也是传递函数(5.102)的极点数和零点之差。

对于一个被控对象, 如果在所关注的区域中不能找到一个正整数 ρ 满足 $1 \leq \rho \leq n$ 及定义 5.1 的条件, 那么该被控对象在该区域中的相对阶就没有定义。

例 5.9 (相对阶没有定义) 考虑如下被控对象^[14]:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.108)$$

$$\dot{x}_2 = \rho(x_1, x_2) + u \quad (5.109)$$

其中, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, 函数 $\rho: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 。

如果该被控对象的输出是

$$y = x_1 \quad (5.110)$$

那么其相对阶是 2。

然而, 如果输出是

$$y = x_1^2 \quad (5.111)$$

那么

$$\dot{y} = 2x_1x_2 \quad (5.112)$$

$$\ddot{y} = 2x_1(\rho(x_1, x_2) + u) + 2x_2^2 \quad (5.113)$$

也就是说,

$$L_g L_f h(\mathbf{x}) = 2x_1 \quad (5.114)$$

其中, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [x_2, \rho(x_1, x_2)]^T$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [0, 1]^T$, $h(\mathbf{x}) = x_1^2$ 。此时, 该系统在原点附近的相对阶没有定义。

对于输入-输出线性化得到的串联积分器模型(5.39), 可以直接将

$$(y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(\rho-1)}) \quad (5.115)$$

视作状态变量, 该状态变量包含 ρ 个分量。但是, 由式(5.24)和式(5.25)定义的原被控对象模型的状态 \mathbf{x} 有 n 个分量。如果 $\rho < n$, 那么串联积分器模型(5.39)就不能完整地复现原被控对象模型的全部状态。也就是说, 对输出的高阶求导过程丢失了状态 \mathbf{x} 中 $n - \rho$ 个分量的信息。因此, 5.1.2 节的输入-输出线性化未必能够完整地复现原被控对象模型的完整动态特性。

例 5.10 (高阶求导过程中被忽视的状态分量) 考虑如下被控对象:

$$\dot{x}_1 = f(x_2) + u \quad (5.116)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.117)$$

$$y = x_1 \quad (5.118)$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态, $y \in \mathbb{R}$ 是输出, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是局部李普希茨的函数。由定义 5.1 可知, 该被控对象的相对阶是 1。选取控制器

$$u = v - f(x_2) \quad (5.119)$$

就能得到

$$\dot{y} = v \quad (5.120)$$

其中, v 是等效的控制输入。

但是, 上述输入-输出线性化过程忽视了状态分量 x_2 的动态特性。即使设计控制器保证输出 $y = x_1$ 有界甚至收敛, 也不能保证状态分量 x_2 不发散。

定理 5.1 给出了当 $\rho < n$ 时对“被丢失”的状态分量的描述方法。

定理 5.1 (输入-输出线性化) 考虑如式(5.24)和式(5.25)所示的被控对象, 假设其在 \mathcal{D} 上的相对阶是 ρ 。

- 如果 $\rho = n$, 那么对于任意 $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$, 都存在一个 \mathbf{x}_0 的邻域 \mathcal{D}_0 , 使得如下定义的 \mathbf{T} 是 \mathcal{D}_0 上的一个微分同胚⁴⁰:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ L_f h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (5.121)$$

- 如果 $\rho < n$, 那么对于任意 $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$, 都存在一个 \mathbf{x}_0 的邻域 \mathcal{D}_0 以及光滑函数 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-\rho}: \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, 使得

(1) 对于每个 $i = 1, 2, \dots, n - \rho$,

$$\frac{\partial \phi_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_0 \quad (5.122)$$

(2) 如下定义的 \mathbf{T} 是 \mathcal{D}_0 上的一个微分同胚:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi(\mathbf{x}) \\ \varphi(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (5.123)$$

其中,

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) \\ \phi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_{n-\rho}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ L_f h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (5.124)$$

根据定理 5.1, 对于由式(5.24)和式(5.25)定义的被控对象模型, 要想在实现输入-输出线性化的同时完整地复现其所有状态分量, 可以考虑定义新的状态变量:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(\mathbf{x}) \\ \varphi(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad (5.125)$$

⁴⁰ 如果 \mathbf{T} 在其定义域 $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ 上是双射, 且其本身及其逆函数均连续可导, 那么就称 \mathbf{T} 为微分同胚。

其中, η 表示的是原被控对象状态 x 在输入-输出线性化过程中丢失的 $n - \rho$ 个分量。对 η 求导可得

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \quad (5.126)$$

由性质(5.122)可知

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f(x) \Big|_{x=T^{-1}(z)} =: f_0(\eta, \xi) \quad (5.127)$$

而 ξ 对应的是输入-输出线性化过程中所考虑到的被控对象输出 y 及其导数:

$$\xi = \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(\rho-1)} \end{bmatrix} \quad (5.128)$$

由输入-输出线性化的结果(5.37)可知

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c (L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)u) \quad (5.129)$$

$$y = C_c \xi \quad (5.130)$$

其中,

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.131)$$

只要由式(5.24)和式(5.25)描述的被控对象模型满足定理 5.1 的条件, 就可以根据(5.125)来定义新的状态变量, 并最终将该被控对象模型转化为

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \quad (5.132)$$

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c (L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)u) \quad (5.133)$$

$$y = C_c \xi \quad (5.134)$$

该模型被称作标准型, 其中状态 η 所对应的子系统通常被称作内部动态。

图 5-8 所示为输入-输出线性化过程中的基本变换关系。

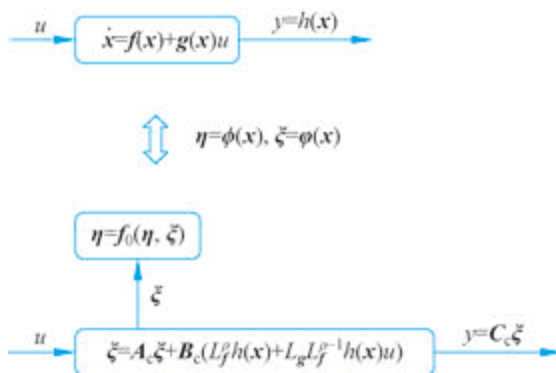


图 5-8 输入-输出线性化

对于 ξ -子系统(5.133), 考虑形如

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x})} (-L_f^{\rho} h(\mathbf{x}) + v) \quad (5.135)$$

的控制器 (其中, v 是新引入的等效控制输入), 能够抵消相应的非线性项并进一步得到

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c v \quad (5.136)$$

例 5.11 (输入-输出线性化和内部动态) 仍然考虑例 5.10 中由式(5.116)~式(5.118)描述的被控对象模型, 其维数 $n=2$, 相对阶 $\rho=1$ 。本例研究如何刻画该被控对象在输入-输出线性化过程中被丢失的内部动态。为便于表示, 记

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [1, 1]^T, \quad \varphi(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) = x_1 \quad (5.137)$$

不难验证, 取

$$\phi(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 \quad (5.138)$$

能够保证

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.139)$$

并且 $[\phi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})]^T$ 是微分同胚。根据定理 5.1, 取

$$\eta = \phi(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 \quad (5.140)$$

$$\xi = \varphi(\mathbf{x}) = x_1 \quad (5.141)$$

能够将如式(5.116)~式(5.118)所示的被控对象转化为如式(5.132)和式(5.134)所示的标准型的形式:

$$\dot{\eta} = f(\xi - \eta) \quad (5.142)$$

$$\dot{\xi} = f(x_2) + u \quad (5.143)$$

$$y = \xi \quad (5.144)$$

在此基础上, 引入控制器

$$u = -f(x_2) + v \quad (5.145)$$

抵消相应的非线性项, 可得

$$\dot{\eta} = f(\xi - \eta) \quad (5.146)$$

$$\dot{\xi} = v \quad (5.147)$$

$$y = \xi \quad (5.148)$$

对于 η -子系统(5.132), 取 $\xi = \mathbf{0}$ 得到的子系统被称作原被控对象的零动态:

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \mathbf{0}) \quad (5.149)$$

如果零动态(5.149)具有一个渐近稳定的平衡点 η^* , 那么由式(5.132)~式(5.134)描述的系统就称作是最小相位系统。

由图 5-8 可见, ξ -子系统(5.136)和 η -子系统(5.127)是串联关系。根据串联系统的稳定性质(推论 4.3), 最小相位系统有这样的优点: 只要设计控制器使 ξ -子系统(5.133)在原点处渐近稳定, 就能使整个闭环系统在平衡点 $(\eta, \xi) = (\eta^*, \mathbf{0})$ 处渐近稳定。比如, 例 4.19 所考虑的就是最小相位系统。只要设计控制器使受控的 (ξ_1, ξ_2) -子系统在原点处渐近稳定, 就能使整个闭环系统在原点处渐近稳定。

进一步考虑定理 5.1 中 $\mathcal{D}_0 = \mathbb{R}^n$ 的情形。如果 η -子系统(5.132)以 ξ 作为输入是输入到状态稳定的, 那么通过设计控制器使受控的 ξ -子系统(5.133)在原点处全局渐近稳定, 就能使整个受控系统在原点处全局渐近稳定(利用推论 4.1)。

需要注意, 要想使闭环系统实现全局渐近稳定, 以上对 η -子系统要求的输入到状态稳定性不能被轻易替换为零动态(即 $\xi \equiv \mathbf{0}$ 时的 η -子系统)具有全局渐近稳定的平衡点, 其原因在于串联系统整体未必保留子系统的全局渐近稳定性。5.1.4 节将进一步讨论最小相位系统的镇定和跟踪控制问题。

5.1.4 最小相位被控对象的控制

在对由式(5.24)和式(5.25)描述的被控对象实施输入-输出线性化的基础上, 本节直接将输入-输出线性化得到的模型

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \quad (5.150)$$

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c v \quad (5.151)$$

$$y = C_c \xi \quad (5.152)$$

作为被控对象, 研究针对该模型的镇定和跟踪控制问题。相关的变量、参数和函数都与如式(5.132)~式(5.134)所示的标准型中定义的相同, v 是利用式(5.135)进行非线性项抵消时引入的新的等效控制输入。

如果由式(5.24)和式(5.25)描述的被控对象的相对阶等于 n , 那么输入-输出线性化后得到的由式(5.150)~式(5.152)描述的模型就仅包含状态 ξ 。此时, 原被控对象就被转化为由式(5.151)和式(5.152)定义的一个串联积分器系统, 而相应的控制问题也得以简化。

如果相对阶小于 n , 那么输入-输出线性化之后就会出现状态分量 η 。这种情况下设计控制器时, 不仅要保证状态分量 ξ 的有界性和收敛性, 而且要保证状态分量 η 的有界性。本节主要考虑最小相位系统: 对于 η -子系统, 假设 f_0 是局部李普希茨的, $f_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 并且零动态

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \mathbf{0}) \quad (5.153)$$

在 origin 处渐近稳定。

1. 镇定

首先考虑 ξ -子系统的镇定问题, 然后分析整个闭环系统在 origin 处的稳定性。

注意到由式(5.131)定义的 (A_c, B_c) 是能控标准型。于是, 可以选取定常矩阵 $K_c \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}$, 使 $(A_c - B_c K_c)$ 是赫尔维茨矩阵, 并设计控制器

$$v = -K_c \xi \quad (5.154)$$

之后, 将控制器(5.154)代入由式(5.150)和式(5.151)描述的被控对象模型, 可得闭环系统

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \quad (5.155)$$

$$\dot{\xi} = (A_c - B_c K_c) \xi \quad (5.156)$$

这是由 η -子系统和受控的 ξ -子系统构成的串联系统 (如图 5-9 所示), 其中 η -子系统受到 ξ 的影响, 而受控的 ξ -子系统是一个自治系统。并且, 通过前面的控制器设计, 受控的 ξ -子系统在 origin 处全局指数稳定。

如下定理给出了一个保证上述闭环系统在 origin 处渐近稳定的条件。

定理 5.2 (最小相位系统的局部镇定) 如果系统 $\dot{\eta} = f_0(\eta, \mathbf{0})$ 在 origin 处渐近稳定, 那么由式(5.155)和式(5.156)定义的闭环系统在 origin 处渐近稳定。

为了证明定理 5.2, 可以首先利用李雅普诺夫逆定理 (定理 2.5) 为 η -子系统(5.155)构造一个李雅普诺夫函数, 之后为如式(5.155)和式(5.156)所示的关联系统构造一个组合型李雅普诺夫函数。或者, 应用串联系统的稳定性结果 (推论 4.1) 也能证明定理 5.2。

需要指出的是, 定理 5.2 仅能保证局部的渐近稳定性。如果 η -子系统是输入到状态稳定的, 那么就能进一步保证全局渐近稳定性。

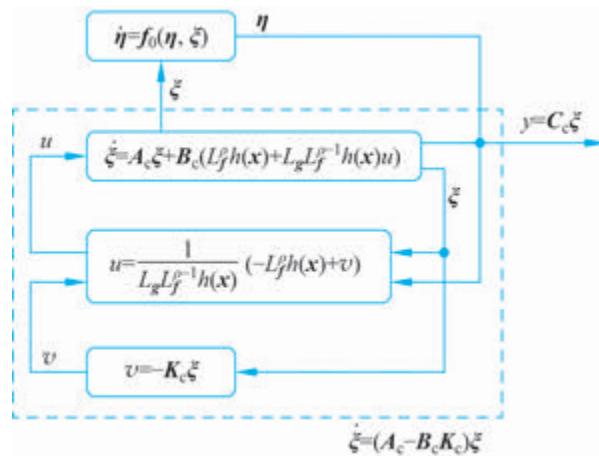


图 5-9 反馈线性化和线性反馈将最小相位被控对象转化为串联系统

定理 5.3 (最小相位系统的全局镇定) 如果子系统(5.155)以 ξ 作为输入是输入到状态稳定的, 那么由式(5.155)和式(5.156)定义的闭环系统在原点处全局渐近稳定。

例 5.12 (最小相位系统的全局镇定) 仍然考虑例 5.11 中由式(5.116)~式(5.118)描述的被控对象的输入-输出线性化模型(见式(5.142)~式(5.144))。具体考虑 $f(\xi - \eta) = (\xi - \eta)^3$ 的情形。

对于 η -子系统(5.142), 定义

$$V_\eta(\eta) = \frac{1}{2}\eta^2 \quad (5.157)$$

那么,

$$V_\eta(\eta) \geq \frac{1}{8}|\xi|^2 \Rightarrow \nabla V_\eta(\eta)f(\xi - \eta) \leq -\frac{1}{2}V_\eta^2(\eta) \quad (5.158)$$

由输入到状态稳定性的李雅普诺夫描述(定理 4.2)可知, η -子系统以 ξ 作为输入是输入到状态稳定的。

在此基础上, 根据定理 5.3, 只需设计控制器将 ξ -子系统(5.143)转化为(5.156)的形式并保证其在原点处全局渐近稳定, 就能使整个闭环系统在原点处全局渐近稳定。为此, 不妨考虑控制器

$$u = -x_2^3 - \xi \quad (5.159)$$

而如果 $f(\xi - \eta) = -(\xi - \eta)^3$, 则很难通过使 ξ -子系统具备稳定性保证整个闭环系统的全局渐近稳定性。

2. 跟踪控制

对于由式(5.150)~式(5.152)描述的被控对象, 本节研究如何设计控制器使状态 (η, ξ) 有界, 并且使输出 y 趋近于参考信号 y_r 。假设参考信号 y_r 满足如下基本条件:

- $y_r, y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(\rho)}$ 均有定义且有界;
- $y_r, y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(\rho)}$ 均可用于反馈控制。

如果将原点看作是固定的设定值, 那么镇定问题就是跟踪控制问题的特例。

为便于设计, 可以将参考信号 y_r 等价地看作是由如下动态系统 (参考模型) 产生的:

$$\dot{\xi}_r = A_c \xi_r + B_c y_r^{(\rho)} \quad (5.160)$$

$$y_r = C_c \xi_r \quad (5.161)$$

其中, $\xi_r = [y_r, y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(\rho)}]^T$, A_c 、 B_c 、 C_c 的定义由式(5.131)给出。

如果能够设计控制器在保证 η 和 ξ 有界的前提下使 ξ 趋近于 ξ_r , 那么就能够实现跟踪控制目标。为此, 定义跟踪误差

$$e = \xi - \xi_r \quad (5.162)$$

并对其求导, 可得跟踪误差子系统

$$\dot{e} = A_c e + B_c (v - y_r^{(\rho)}) \quad (5.163)$$

选取定常矩阵 $K_c \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}$ 使得 $(A_c - B_c K_c)$ 是赫尔维茨矩阵⁴¹, 并设计控制器

$$v = -K_c e + y_r^{(\rho)} \quad (5.164)$$

其中, $y_r^{(\rho)}$ 是用于实现跟踪的前馈项。将该控制器代入跟踪误差子系统(5.163), 可得

$$\dot{e} = (A_c - B_c K_c) e \quad (5.165)$$

同时, 利用跟踪误差 e 的定义(5.162), 可以将 η -子系统(5.150)等价地写成

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi_r + e) \quad (5.166)$$

这样, 最终得到如下闭环系统:

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi_r + e) \quad (5.167)$$

$$\dot{e} = (A_c - B_c K_c) e \quad (5.168)$$

其中的 e -子系统(5.168)在原点处全局渐近 (指数) 稳定。

如果 $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ 在原点处渐近稳定, 那么只要 ξ_r 足够小, 就能保证 η 有界 (比如, 可借助 4.1.4 节渐近稳定性与局部输入到状态稳定性的等价关系)。如果 η -子系统(5.167)以 $\xi_r + e$ 作为输入是输入到状态稳定的, 那么有界且充分光滑的任意参考信号 y_r 都能保证 η 有界。

综上所述, 利用反馈线性化的结果, 要为由式(5.24)和式(5.25)描述的被控对象设计控制器, 可以首先为线性化的模型(5.39)设计控制器 (其控制输入是 v), 然后将 v 代入

⁴¹ 由于 (A_c, B_c) 可控, 因此一定存在 K_c 使得 $(A_c - B_c K_c)$ 是赫尔维茨的。

式(5.38)就能得到真正的控制输入 u 。需要说明的是, 上述的反馈线性化过程也属于控制器设计的一部分, 新引入的等效控制输入 v 实际上是最终设计出的控制器的中间变量。

图 5-10 给出了最小相位被控对象的跟踪控制系统结构。

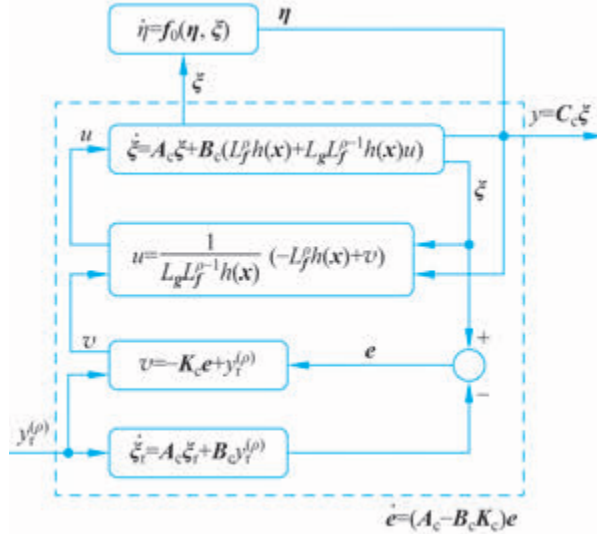


图 5-10 最小相位被控对象的跟踪控制系统结构

例 5.13 (差速驱动小车的轨迹跟踪控制) 在例 5.4 中对小车模型进行基于中心点偏移的反馈线性化的基础上, 考虑控制小车跟踪由如下参考模型描述的位置轨迹:

$$\dot{p}'_{xr} = v'_{xr} \quad (5.169)$$

$$\dot{p}'_{yr} = v'_{yr} \quad (5.170)$$

其中, $\mathbf{p}_r = [p_{xr}, p_{yr}]^T \in \mathbb{R}^2$ 表示期望的位置, $\mathbf{v}_r = [v_{xr}, v_{yr}]^T \in \mathbb{R}^2$ 表示期望的速度。

定义位置跟踪误差

$$e'_x = p_x - p_{xr}, \quad e'_y = p_y - p_{yr} \quad (5.171)$$

设计控制器

$$u'_x = -k e'_x + v'_{xr} \quad (5.172)$$

$$u'_y = -k e'_y + v'_{yr} \quad (5.173)$$

那么, 相应的误差系统是

$$\dot{e}'_x = -k e'_x, \quad \dot{e}'_y = -k e'_y \quad (5.174)$$

其在原点处全局渐近稳定, 从而实现了轨迹跟踪控制目标。

例 5.14 (最小相位系统的跟踪控制) 考虑例 5.10 中对由式(5.116)~式(5.118)描述的

被控对象作线性化之后得到的模型（见式(5.142)~式(5.144)）。注意到例 5.12 已经证明其 η -子系统是输入到状态稳定的。因此，要想使输出 y 跟踪有界且光滑的设定值信号 y_r ，只需选取控制器

$$u = -x_2^3 - (y - y_r) + \dot{y}_r \quad (5.175)$$

5.1.5 ▲ 全状态线性化

5.1.2 节考虑的是如何找到新的等效控制输入使之与事先确定的输出变量之间呈线性关系，并最终将由式(5.24)和式(5.25)描述的非线性被控对象转化成如式(5.132)~式(5.134)所示的形式。其中，状态分量 ξ 对应的是被控对象中能够被线性化的部分，而状态分量 η 对应的则是未能被线性化处理的部分。

本节主要研究在未事先确定输出映射的情况下，如何对一个非线性被控对象实现全状态的反馈线性化。具体考虑如下形式的被控对象模型：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u \quad (5.176)$$

其中， $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ 是状态， $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入，函数 $\boldsymbol{f}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{g}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 表示被控对象的动力学。在状态空间 \mathbb{R}^n 中， \mathcal{D} 表示将要实施线性化的区域。假设函数 \boldsymbol{f} 和 \boldsymbol{g} 在 \mathcal{D} 上都是充分光滑的，以此来保证能够实施线性化的高阶求导过程。

定义 5.2 (全状态线性化) 考虑被控对象(5.176)。如果存在一个定义在 \mathcal{D} 上的微分同胚 \boldsymbol{T} 使得通过坐标变换 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ 能够将该被控对象转化为

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}\gamma(\boldsymbol{x})(u - \alpha(\boldsymbol{x})) \quad (5.177)$$

其中， \boldsymbol{A} 和 \boldsymbol{B} 是相应维数的实矩阵且 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 可控， $\gamma: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ 对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$ 都满足 $\gamma(\boldsymbol{x}) \neq 0$ ， $\alpha: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ，那么被控对象(5.176)能够在 \mathcal{D} 上实现全状态线性化。

系统(5.177)和系统(5.133)形式类似，只是系统(5.133)不仅要求 $(\boldsymbol{A}_c, \boldsymbol{B}_c)$ 能控，而且还要求 $(\boldsymbol{A}_c, \boldsymbol{B}_c)$ 具有能控标准型的形式（见式(5.131)）。

如果存在一个充分光滑的函数 $h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得被控对象(5.176)以 $y = h(\boldsymbol{x})$ 作为输出的相对阶 $\rho = n$ ，那么就可以直接使用输入-输出线性化来实现全状态线性化。此时，可以定义

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} h(\boldsymbol{x}) \\ L_{\boldsymbol{f}}h(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ L_{\boldsymbol{f}}^{n-1}h(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \quad (5.178)$$

并在式(5.133)的基础上取

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \quad (5.179)$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_c, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_c, \quad (5.180)$$

$$\gamma(\boldsymbol{x}) = L_g L_f^{n-1} h(\boldsymbol{x}), \quad \alpha(\boldsymbol{x}) = -\frac{L_f^n h(\boldsymbol{x})}{L_g L_f^{n-1} h(\boldsymbol{x})} \quad (5.181)$$

这样就能将被控对象(5.176)转化为如式(5.177)所示的形式, 并且 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 可控。

另一方面, 假设被控对象(5.176)能够实现全状态线性化, 那么根据定义 5.2, 存在变量代换 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ 将该被控对象转化为系统(5.177)的形式, 并且 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 可控。根据线性系统理论, 只要 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 可控, 就存在一个满秩矩阵 $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和一个状态反馈增益矩阵 \boldsymbol{K} 使得

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{-1} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}_c \quad (5.182)$$

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_c \quad (5.183)$$

于是, 定义

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \quad (5.184)$$

容易验证,

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{B}\gamma(\boldsymbol{x})(u - \alpha(\boldsymbol{x})) \\ &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{\xi} + \gamma(\boldsymbol{x})(u - \alpha(\boldsymbol{x}))) \\ &= \boldsymbol{A}_c\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{B}_c\gamma(\boldsymbol{x}) \left(u - \alpha(\boldsymbol{x}) + \frac{\boldsymbol{K}}{\gamma(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \right) \end{aligned} \quad (5.185)$$

该系统与系统(5.131)形式相同。

为便于表示, 将 \boldsymbol{M} 记作

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} \quad (5.186)$$

定义

$$y = h(\boldsymbol{x}) = M_1\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \quad (5.187)$$

那么, 对于 $i = 1, 2, \dots, n-1$,

$$y^{(i)} = M_{i+1}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \quad (5.188)$$

并且

$$y^{(n)} = \gamma(\mathbf{x}) \left(u - \alpha(\mathbf{x}) + \frac{K}{\gamma(\mathbf{x})} \mathbf{M}\mathbf{T}(\mathbf{x}) \right) \quad (5.189)$$

不难验证,

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{i-1}h(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.190)$$

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{n-1}h(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (5.191)$$

也就是说, 如果将 $y = h(\mathbf{x})$ 看作输出, 那么被控对象(5.176)的相对阶是 n 。

综上, 能够对被控对象(5.176)实施全状态线性化的充要条件是: 存在一个充分光滑的函数 $h(\mathbf{x})$ 使得该被控对象以 $y = h(\mathbf{x})$ 作为输出时的相对阶为 n 。而要保证存在这样的函数 h , 被控对象(5.176)所需满足的充要条件可以用函数 \mathbf{f} 和 \mathbf{g} 的性质来描述。这里需要用到微分几何中的概念。对于向量场 $\mathbf{f}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{g}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, 记

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (5.192)$$

其中, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, 并称之为李括号。为了简化迭代运用李括号运算时的符号, 记

$$\text{ad}_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (5.193)$$

$$\text{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = [\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x}) \quad (5.194)$$

$$\text{ad}_{\mathbf{f}}^k \mathbf{g}(\mathbf{x}) = [\mathbf{f}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^{k-1} \mathbf{g}](\mathbf{x}), \quad k \geq 1 \quad (5.195)$$

给定向量场 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, 在 $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ 处将由 $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_k(\mathbf{x})$ 生成的子空间记作:

$$\Delta(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_k(\mathbf{x})\} \quad (5.196)$$

而在 \mathcal{D} 上就将其统一记作

$$\Delta = \text{span}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\} \quad (5.197)$$

并称作分布。

如果一个分布 Δ 满足

$$\{\mathbf{g}_1 \in \Delta, \mathbf{g}_2 \in \Delta\} \Rightarrow [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] \in \Delta \quad (5.198)$$

那个该分布被称作是对合的。

定理 5.4 (全状态线性化的充要条件) 被控对象(5.176)能够在 \mathcal{D} 上实现全状态线性化的充要条件是:

- 对所有 $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, 矩阵 $[\mathbf{g}(\mathbf{x}), \text{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{\mathbf{f}}^{n-1} \mathbf{g}(\mathbf{x})]$ 的秩恒为 n ;
- 分布 $\text{span}\{\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}, \dots, \text{ad}_{\mathbf{f}}^{n-1} \mathbf{g}\}$ 在 \mathcal{D} 上是对合的。

例 5.15 (全状态线性化) 考虑如下被控对象^[18]:

$$\dot{x}_1 = \cos x_1 - x_1^3 + x_2 \quad (5.199)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.200)$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入。取

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \cos x_1 - x_1^3 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.201)$$

显然, 由式(5.199)和式(5.200)描述的被控对象与被控对象(5.176)的形式相同。不难验证,

$$\begin{aligned} \text{ad}_f \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} * & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.202)$$

因此, 矩阵 $[\mathbf{g}(\mathbf{x}), \text{ad}_f \mathbf{g}(\mathbf{x})]$ 的秩恒为 2。进一步地,

$$\text{span}\{\mathbf{g}, \text{ad}_f \mathbf{g}\} = \mathbb{R}^2 \quad (5.203)$$

因此, $\text{span}\{\mathbf{g}, \text{ad}_f \mathbf{g}\}$ 在 \mathbb{R}^2 上是对合的。

根据定理 5.4, 由式(5.199)和式(5.200)描述的被控对象能够在 \mathbb{R}^2 上实现全状态线性化。

其实, 将

$$y = h(\mathbf{x}) = x_1 \quad (5.204)$$

视作输出, 那么该被控对象的相对阶是 2, 其能够实现输入-输出线性化且没有内部动态。

定义

$$z_1 = h(\mathbf{x}) = x_1, \quad z_2 = L_f h(\mathbf{x}) = \cos x_1 - x_1^3 + x_2 \quad (5.205)$$

进而对 $\mathbf{z} = [z_1, z_2]^T$ 求导就不难得到形如(5.177)的系统, 其中,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.206)$$

$$\gamma(\mathbf{x}) = 1, \quad \alpha(\mathbf{x}) = (\sin x_1 + 3x_1^2)(\cos x_1 - x_1^3 + x_2) \quad (5.207)$$

在此基础上, 只需取控制器

$$u = -k_1 z_1 - k_2 z_2 + \alpha(\mathbf{x}) \quad (5.208)$$

其中, k_1 和 k_2 是正的常数, 就能使施加了控制器的被控对象在原点处全局渐近稳定。也可以等价地用被控对象原本的状态 \mathbf{x} 来表示控制器(5.208):

$$u = -k_1 x_1 - k_2 (\cos x_1 - x_1^3 + x_2) + (\sin x_1 + 3x_1^2)(\cos x_1 - x_1^3 + x_2) \quad (5.209)$$

5.2 滑模控制

线性化的处理方式要么要求已知被控对象在较大范围中的准确模型(见 5.1 节), 要么仅在局部范围内有效(见 2.3 节), 难以直接应用于包含不确定、强非线性动力学的被控对象。

对于一些具有特定结构的被控对象, 能够构造一种滑动面, 即使受到不确定性或干扰的影响, 也能通过在滑动面不同方向的控制模态之间进行切换使闭环系统状态在有限时间内到达滑动面, 并在此之后沿着滑动面趋近于期望的工作状态。这种控制方式称作滑模控制。

5.2.1 基本思想

首先以单摆的摆角控制为例介绍滑模控制的基本思想。

例 5.16 (单摆摆角控制) 仍然考虑例 5.1 的单摆摆角控制问题。不过, 此时由式(5.3)和式(5.4)描述的模型中的参数 m 、 l 和 k 均是未知的。特别是由于 m 和 l 未知, 导致难以对该被控对象模型实施反馈线性化。

首先考虑 x_1 -子系统, 如果能够保证 $x_2 = -k_1 x_1$, 也就是 $k_1 x_1 + x_2 = 0$, 其中 k_1 是一个正的常数, 那么自然能够保证 x_1 趋近于零。因此, 直观而言, 只要使状态 (x_1, x_2) 保持于直线 $k_1 x_1 + x_2 = 0$ 上, 就能使其滑动至原点。因此, 将直线

$$S = \{(x_1, x_2) : k_1 x_1 + x_2 = 0\} \quad (5.210)$$

称作滑动面。

而为了使状态 (x_1, x_2) 到达滑动面 S , 首先定义两者之间的误差量

$$s = k_1 x_1 + x_2 \quad (5.211)$$

如果 $s = 0$, 那么状态 (x_1, x_2) 就位于滑动面 S 上。为了使 $s = 0$, 需要建立 s 与控制输入 u 之间的关系。求 s 相对于时间 t 的导数, 可得

$$\begin{aligned}\dot{s} &= k_1\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ &= k_1x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1 + \theta_0) - \frac{k}{ml^2}x_2 + \frac{1}{ml^2}u\end{aligned}\quad (5.212)$$

考虑控制器

$$u = -\text{sign}(s)(c_1 + c_2|x_2|)\quad (5.213)$$

其中, c_1 和 c_2 为正的常数。该控制器引入了依赖 $s = k_1x_1 + x_2$ 的符号运算 (sign), 在滑动面 S 两侧的不同模态之间切换控制量。

将控制器(5.213)代入式(5.212), 可得

$$\dot{s} = k_1x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1 + \theta_0) - \frac{k}{ml^2}x_2 - \frac{1}{ml^2}\text{sign}(s)(c_1 + c_2|x_2|)\quad (5.214)$$

通过选取控制器的参数 c_1 和 c_2 满足

$$c_1 \geqslant ml(g+l), \quad c_2 \geqslant |k_1ml^2 - k|\quad (5.215)$$

能够保证:

- 当 $s > 0$ 时, $\dot{s} < -1$;
- 当 $s < 0$ 时, $\dot{s} > 1$ 。

因此, 不论初始值 $s(0)$ 是多少, 都能保证 $s(t)$ 有界且在有限时间内到达零。相应地, 闭环系统状态 (x_1, x_2) 在有限时间内到达滑动面 S 。

注意到

$$\dot{x}_1 = x_2 = -k_1x_1 + s\quad (5.216)$$

如果将 s 看作输入, 那么这是一个稳定的线性时不变系统。由于 s 有界且在有限时间内到达零, 因此状态 x_1 保持有界。而利用 x_1 和 s 的有界性又能进一步保证 x_2 的有界性。尽管被控对象模型中包含未知参数, 上述基于滑动面的控制器能够保证闭环系统状态有界且趋近于原点。

图 5-11 所示的是由式(5.3)、式(5.4)、式(5.211)和式(5.213)构成的受控误差系统从不同初始状态出发的状态轨迹 ($mgl = ml^2 = 1, k = 0.5, k_1 = 1, c_1 = 2, c_2 = 1, \theta_0 = 2\pi/3$)。

例 5.16 采用的是这样一种控制方式: 在预先设计的滑动面两侧不同模态之间切换控制量, 从而使被控对象状态有界并在有限时间内到达滑动面; 而一旦到达滑动面, 就能进一步保证状态沿着滑动面趋近于原点。这就是滑模控制的基本过程。可以看出, 例 5.16 中的控制器设计过程并不需要精确已知被控对象的参数, 其所选取的控制器参数只需要满足与被控对象参数有关的不等式条件(5.215)即可, 而所设计的滑模控制器则能够通过在不同模态之间的切换压制住被控对象模型参数的不确定性。也就是说, 滑模控制具有克服不确

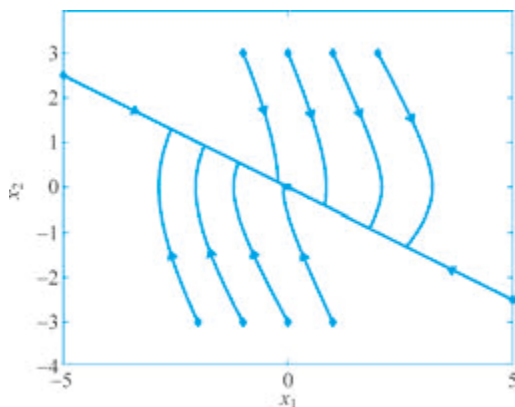


图 5-11 滑模控制的单摆状态轨迹

定性的能力。由于滑模控制是通过在不同的连续模态之间切换来达到期望控制目标的，因此也被称作变结构控制^[268]。

下面考虑一类更一般的二阶被控对象

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.217)$$

$$\dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u \quad (5.218)$$

其中， $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态， $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入， $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 均为局部李普希茨的函数。假设函数 f 和 g 满足如下条件：

- 已知一个函数 $\bar{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ，使得

$$|f(x_1, x_2)| \leq \bar{f}(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \quad (5.219)$$

- 已知一个常数 $g > 0$ ，使得

$$g(x_1, x_2) \geq g, \quad \forall x_1, x_2 \quad (5.220)$$

不难看出，由式(5.217)和式(5.218)描述的被控对象与例 5.16 考虑的由式(5.3)和式(5.4)描述的单摆模型形式相同。于是，仍然考虑利用滑模控制方法来解决控制问题。定义滑动面

$$S = \{(x_1, x_2) : x_2 = -kx_1\} \quad (5.221)$$

其中， k 是一个正的常数。

如果被控对象状态处于滑动面 S 上，即 $x_2 = -kx_1$ ，那么对于被控对象的 x_1 -子系统(5.217)，有

$$\dot{x}_1 = x_2 = -kx_1 \quad (5.222)$$

此时，显然有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0 \quad (5.223)$$

也就是说，只要能够保证被控对象状态 (x_1, x_2) 处于滑动面 S 上，就能保证其趋近于原点。

下面通过控制的手段使状态 (x_1, x_2) 保持有界并在有限时间内到达滑动面 S 。为此，定义由状态 (x_1, x_2) 到滑动面 S 的误差量

$$s = kx_1 + x_2 \quad (5.224)$$

从 (x_1, x_2) 平面上看， s 是直线 $s = kx_1 + x_2$ 与 x_2 轴的交点，而滑动面 S 对应的是 $s = 0$ 。只要使 s 到达零并在此之后保持为零，就能保证状态 (x_1, x_2) 到达并停留于滑动面 S 。图 5-12 所示为滑动面和滑模控制的基本思想。

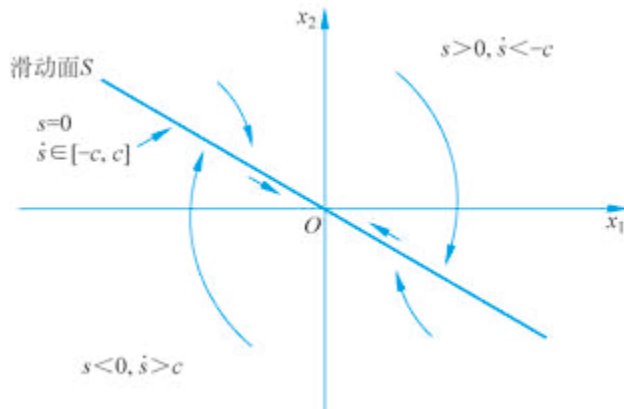


图 5-12 滑动面和滑模控制

求 s 对时间 t 的导数，可得 s 与控制输入 u 的关系：

$$\dot{s} = k\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = kx_2 + f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u \quad (5.225)$$

在已知 $|f(x_1, x_2)|$ 的上界 $\bar{f}(x_1, x_2)$ 以及 $g(x_1, x_2)$ 的下界 \underline{g} 的情况下，为了使 s 保持有界并在有限时间内到达零，考虑使用如下控制器：

$$u = -\text{sign}(s) \frac{k|x_2| + \bar{f}(x_1, x_2) + c}{\underline{g}} \quad (5.226)$$

其中， c 是一个正的常数。

为了验证控制器(5.226)的有效性，将其代入式(5.225)，可得

$$\dot{s} = kx_2 + f(x_1, x_2) - g(x_1, x_2) \text{sign}(s) \frac{k|x_2| + \bar{f}(x_1, x_2) + c}{\underline{g}} \quad (5.227)$$

定义

$$V(s) = |s| \quad (5.228)$$

当 $s \neq 0$ 时, 沿系统(5.227)的任意轨迹求取 $V(s)$ 对时间 t 的导数, 都有

$$\begin{aligned}\dot{V}(s) &= \text{sign}(s) \cdot \dot{s} \\ &= \text{sign}(s) \left(kx_2 + f(x_1, x_2) - g(x_1, x_2) \text{sign}(s) \frac{k|x_2| + \bar{f}(x_1, x_2) + c}{g} \right) \\ &\leq -\frac{g(x_1, x_2)(k|x_2| + \bar{f}(x_1, x_2) + c)}{g} + |kx_2| + |f(x_1, x_2)| \\ &\leq -c\end{aligned}\quad (5.229)$$

这说明, 当 $s(t) \neq 0$ 时,

$$|s(t)| - |s(0)| \leq -ct \quad (5.230)$$

并且, $s(t)$ 在有限时间 $|s(0)|/c$ 内从初始状态 $s(0)$ 到达零 (为了证明这一点, 可以考虑对微分不等式(5.229)应用比较原理, 见附录 A.4)。相应地, 状态 (x_1, x_2) 在有限时间内到达并在此之后一直处于滑动面 S 上。

需要说明的是, 由于滑模控制器中包含不连续的符号函数 sign , 因此相应的闭环系统动力学也是不连续的 (不连续的点处于滑动面上)。这类系统不能使用右侧连续的常微分方程来刻画, 相应的状态轨迹也不能通过常规的常微分方程的解 (见附录 A.3) 来表示。为此, 可以考虑在动力学函数的不连续点处使用其不同取值的闭凸包来表示状态轨迹的所有可能变化率, 并进而使用菲利波夫解 (Filippov solution) 来表示状态轨迹^[269, 270]。当然, 这种处理方式并不影响系统状态在到达滑动面之前的分析。

要保证滑模控制器有效, 必须保证由式(5.217)和式(5.218)描述的原被控对象的状态 (x_1, x_2) 不会在有限时间内发散到无穷远处, 也就是说, 要保持有界。尽管以上分析已经保证了 s 有界, 但尚不足以直接保证 (x_1, x_2) 有界。在 s 有界的基础上, 如下利用闭环系统的动态特性来分析 (x_1, x_2) 的有界性。

对于 x_1 -子系统(5.217), 代入 $x_2 = -kx_1 + s$ (与定义(5.224)一致), 可得

$$\dot{x}_1 = -kx_1 + s \quad (5.231)$$

如果将 s 看作输入, 那么该系统是一个稳定的线性时不变系统, 而从 s 有界能够推出 x_1 有界。或者, 也可以利用积分不等式来分析:

$$\begin{aligned}|x_1(t)| &\leq |x_1(0)|e^{-kt} + \int_0^t e^{-k(t-\tau)} |s(\tau)| d\tau \\ &\leq |x_1(0)| + \frac{1}{k} |s(0)| \\ &\leq |x_1(0)| + \frac{1}{k} |kx_1(0) + x_2(0)| \\ &\leq 2|x_1(0)| + \frac{1}{k} |x_2(0)|\end{aligned}\quad (5.232)$$

上式对所有 $t \geq 0$ 都成立, 其中第二个不等式用到了 $|s(t)|$ 随时间非增的性质(5.230), 而第三个不等式则用到了 s 的定义(5.224)。在此基础上, 再次使用 s 的定义可得, 状态分量 x_2 满足

$$\begin{aligned} |x_2(t)| &= |-kx_1(t) + s(t)| \\ &\leq 3k|x_1(0)| + 2|x_2(0)| \end{aligned} \quad (5.233)$$

对所有 $t \geq 0$ 都成立。

可见, 对于由式(5.217)和式(5.218)描述的被控对象及滑模控制器(5.226)构成的闭环系统, 存在一个正的常数 a , 使得对于任意初始状态 $\mathbf{x}(0)$,

$$|\mathbf{x}(t)| \leq a|\mathbf{x}(0)| \quad (5.234)$$

对所有 $t \geq 0$ 都成立。这样就保证了闭环系统状态 (x_1, x_2) 在整个控制过程中都是有界的。

综上, 对于由式(5.217)和式(5.218)描述的被控对象, 利用形如(5.226)的滑模控制器能够保证闭环系统状态有界并趋近于原点。

定理 5.5 (二阶非线性被控对象的滑模控制) 考虑如式(5.217)和式(5.218)所示的被控对象和控制器(5.226)。如果满足条件(5.219)和条件(5.220), 那么对于任意初始状态 $\mathbf{x}(0)$, 闭环系统状态轨迹 $\mathbf{x}(t)$ 保持有界且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (5.235)$$

由上述讨论可见, 滑模控制的过程分为两个阶段: 抵近阶段和滑动阶段。

- 在抵近阶段, 通过在滑动面两侧对应的不同控制模态之间切换控制量使被控对象状态抵近并最终维持于滑动面上;
- 在滑动阶段, 被控对象状态自动地沿滑动面趋近于期望平衡点 (比如原点)。

如果将 s 看作被控对象的输出, 那么闭环系统状态在滑动面上的运动对应于被控对象的零动态 (零动态的概念见 5.1.3 节)。

前面讨论的由式(5.217)和式(5.218)描述的被控对象和滑模控制器(5.226)不直接依赖时间。但是, 即使闭环系统中存在一些时变因素 (比如被控对象的动力学或被跟踪的参考信号随时间变化), 上述滑模控制方法仍然有效。

例 5.17 (潜航器航向角跟踪控制) 考虑简化的潜航器航向角动态方程^[58]:

$$\ddot{\psi} + a\dot{\psi}|\dot{\psi}| = \tau \quad (5.236)$$

其中, $\psi \in \mathbb{R}$ 表示航向角, $\tau \in \mathbb{R}$ 是等效的力矩控制输入, $a > 0$ 表示阻力系数。

记 $x_1 = \psi$ 、 $x_2 = \dot{\psi}$ 、 $u = \tau$, 那么可以将该被控对象模型等价地写成

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.237)$$

$$\dot{x}_2 = -ax_2|x_2| + u \quad (5.238)$$

考虑参数 a 未知的情形。但假设已知一个正的常数 a_{\max} 保证 $0 < a \leq a_{\max}$ 。以 u 作为控制输入，本例期望设计控制器使航向角对应的状态分量 x_1 跟踪设定值 x_1^r 。假设 $\dot{x}_1^r(t)$ 和 $\ddot{x}_1^r(t)$ 对所有 t 都有定义。

定义控制误差

$$e_1 = x_1 - x_1^r, \quad e_2 = x_2 - \dot{x}_1^r \quad (5.239)$$

并求导，可得误差系统

$$\dot{e}_1 = e_2 \quad (5.240)$$

$$\dot{e}_2 = -ax_2|x_2| + u - \ddot{x}_1^r \quad (5.241)$$

进一步地，引入等效控制输入 v 并设计形如

$$u = v + \ddot{x}_1^r \quad (5.242)$$

的控制器，可得

$$\dot{e}_1 = e_2 \quad (5.243)$$

$$\dot{e}_2 = -ax_2|x_2| + v \quad (5.244)$$

显然，该误差系统与由式(5.217)和式(5.218)描述的系统形式相同。而只要能保证该误差系统的状态分量 e_1 趋近于零，就能保证原被控对象实现跟踪控制目标。

为此，采用本节介绍的滑模控制方法。定义滑动面

$$S = \{(e_1, e_2) : e_2 = -ke_1\} \quad (5.245)$$

其中， k 是一个正的常数。相应地，将误差状态 (e_1, e_2) 相对于滑动面 S 的误差定义为

$$s = ke_1 + e_2 \quad (5.246)$$

在此基础上，选取

$$v = -\text{sign}(s)(ke_2 + a_{\max}|x_2|^2 + c) \quad (5.247)$$

其中， c 是一个正的常数。

综合式(5.242)和式(5.247)，可以直接将以上设计的滑模控制器写成

$$u = -\text{sign}(ke_1 + e_2)(ke_2 + a_{\max}|x_2|^2 + c) + \ddot{x}_1^r \quad (5.248)$$

其中的误差变量 e_1 和 e_2 是由式(5.239)定义的。该控制器能够保证原被控对象的状态分量 x_1 趋近于变化的设定值 x_1^r 。

当然，为了保证对变化设定值 x_1^r 的跟踪，本例将跟设定值变化率有关的项 \dot{x}_1^r 和 \ddot{x}_1^r

引入了控制器设计。然而,时常难以预先给出或实时准确测量设定值的变化率。对于这种情况,也可以利用滑模控制的手段将 \dot{x}_1^* 和 \ddot{x}_1^* 转化为干扰项处理掉(前提是已知 $|\dot{x}_1^*|$ 和 $|\ddot{x}_1^*|$ 的某个上界)。

5.2.2 滑动面的构造与镇定

在 5.2.1 节的讨论中,如果 (x_1, x_2) 处于滑动面 S 上,那么 $x_2 = -kx_1$ 。在由式(5.217)和式(5.218)描述的被控对象中,如果将 x_2 看作是 x_1 -子系统的“虚拟”控制输入,那么滑动面 S 对应的 $x_2 = -kx_1$ 能够保证 x_1 有界且趋近于零,并进而保证 x_2 有界且趋近于零。

基于这一思想,本节将滑模控制推广到一类更一般的被控对象:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (5.249)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u \quad (5.250)$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, $f_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $f_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 均是未知的局部李普希茨的函数。期望设计状态反馈控制器使闭环系统状态有界且 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$ 。

对被控对象模型中的函数 f_1 、 f_2 和 g 作如下基本假设:

- 存在已知的函数 $\bar{f}_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, 使得

$$|f_1(x_1, x_2)| \leq \bar{f}_1(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \quad (5.251)$$

- 存在已知的函数 $\bar{f}_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, 使得

$$|f_2(x_1, x_2)| \leq \bar{f}_2(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \quad (5.252)$$

- 存在已知的常数 $g > 0$, 使得

$$g(x_1, x_2) \geq g, \quad \forall x_1, x_2 \quad (5.253)$$

延续 5.2.1 节的思想,对于 x_1 -子系统,认为已经具有一个控制器

$$x_2 = \phi(x_1) \quad (5.254)$$

其中, $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个连续可导的函数,使得受控的 x_1 -子系统

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \phi(x_1)) \quad (5.255)$$

在 原点处全局渐近稳定。对于这种情况,如果能够使状态 (x_1, x_2) 保持在集合

$$S = \{(x_1, x_2) : x_2 = \phi(x_1)\} \quad (5.256)$$

中,那么就能首先保证 x_1 有界且收敛,并进而保证 x_2 有界且收敛。此时,可以将集合 S 看作滑动面。与 5.2.1 节所考虑的情形相比,此处的滑动面未必是一个平面(或直线),而

可能是非线性的,如图 5-13 所示。

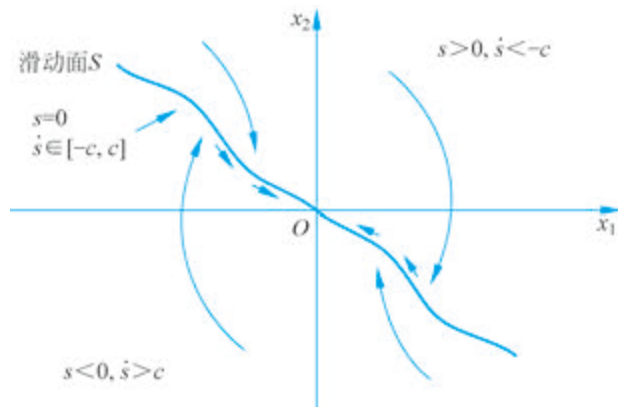


图 5-13 非线性的滑动面

但是,除了要保证被控对象状态处于滑动面上时有界并收敛,还要保证其在到达滑动面之前有界。当被控对象包含非线性动力学时,其状态有可能在到达滑动面之前就已趋于无穷远了。

例 5.18 (闭环系统状态在到达滑动面之前发散) 考虑如下被控对象:

$$\dot{x}_1 = x_1^2 x_2 \quad (5.257)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.258)$$

其中, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入。该被控对象与由式(5.249)和式(5.250)定义的系统形式相同。容易验证,如果

$$x_2 = -\arctan x_1 \quad (5.259)$$

那么, x_1 -子系统在原点处全局渐近稳定(可以选取二次型李雅普诺夫函数 $V_1(x_1) = x_1^2/2$ 来验证)。

那么,不妨选取滑动面

$$S = \{(x_1, x_2) : x_2 = -\arctan x_1\} \quad (5.260)$$

相应地,定义状态 (x_1, x_2) 到滑动面 S 的误差量

$$s = x_2 + \arctan x_1 \quad (5.261)$$

并求取 s 对时间的导数,可得

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{x}_2 + \frac{1}{1+x_1^2} \dot{x}_1 \\ &= u + \frac{x_1^2 x_2}{1+x_1^2} \end{aligned} \quad (5.262)$$

要使 s 在有限时间内到达零 (相应地, 状态 (x_1, x_2) 在有限时间内到达滑动面 S), 考虑控制器

$$u = -\text{sign}(s) \left(\frac{x_1^2 |x_2|}{1 + x_1^2} + c \right) \quad (5.263)$$

其中, c 是一个正的常数。该控制器能够保证

- 当 $s > 0$ 时, $\dot{s} < -c$;
- 当 $s < 0$ 时, $\dot{s} > c$ 。

也就是说, s 在有限时间内到达零, 而相应的状态 (x_1, x_2) (如果有定义的话) 也在有限时间内到达滑动面 S 。

问题在于, 状态 (x_1, x_2) 可能在 s 到达零之前已发散到无穷远。具体分析如下:

- 控制器(5.263)生成的控制量一定满足

$$|u| \leq |x_2| + c \quad (5.264)$$

其具有一个与 x_1 无关的上界。因此, 任意给定 $x_2(0) > 0$ 和 $\epsilon > 0$, 总存在一个与 x_1 无关的时刻 $t_\delta > 0$, 使得

$$x_2(t) \geq \frac{1}{1 + \epsilon} x_2(0), \quad \forall t \in [0, t_\delta] \quad (5.265)$$

在这种情况下, 下面进一步分析当 $x_1(0) > 0$ 时 $x_1(t)$ 的变化特性。

- 在时间区间 $[0, t_\delta]$ 中, 在初始状态相同的情况下, 对 x_1 -子系统(5.257)和系统 $\dot{\xi} = \xi^2 x_2(0)/(1 + \epsilon)$ 应用比较原理 (见附录 A.4)。对于任意时刻 $t \in [0, t_\delta]$, 要么

$$x_1(t) \geq \xi(t) = \frac{x_1(0)}{1 - bx_1(0)t} \quad (5.266)$$

其中 $b = x_2(0)/(1 + \epsilon)$; 要么 $x_1(t)$ 已趋于无穷远。而如果 $x_1(0) > 1/(bt_\delta) = (1 + \epsilon)/(x_2(0)t_\delta)$, 那么 $x_1(t)$ 必定在时间区间 $[0, t_\delta]$ 中趋于无穷。

也就是说, 对于由式(5.257)和式(5.258)定义的被控对象及滑模控制器(5.263)构成的闭环系统, 其状态可能在有限时间内趋于无穷。图 5-14 为该闭环系统从不同初始状态出发的状态轨迹 (控制器参数 $c = 1$)。

例 5.18 说明, 即使滑动面对应的控制器能够保证 x_1 -子系统在原点处全局渐近稳定, 也不能保证基于其设计的滑模控制器使闭环系统状态保持有界。为了避免出现例 5.18 中的有限逃逸时间现象, 需要充分考虑被控对象状态在到达滑动面之前的动态特性。

定义状态 (x_1, x_2) 相对于由式(5.256)定义的滑动面 S 的误差量

$$s = x_2 - \phi(x_1) \quad (5.267)$$

那么, 可以将 x_1 -子系统(5.249)等价地写作

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \phi(x_1) + s) \quad (5.268)$$

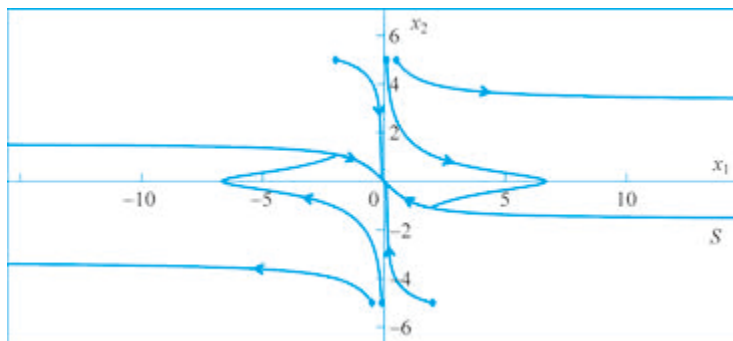


图 5-14 滑模控制系统的状态可能在到达滑动面之前发散

如果选取的函数 ϕ 能够使系统(5.268)对 s 具有充分的鲁棒性, 那么只要 s 有界就能保证状态 (x_1, x_2) 有界。

本节利用输入到状态稳定性来刻画所要求的这种鲁棒性。

假设 5.1 已知连续可导的函数 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 x_1 -子系统(5.268)以 s 作为输入是输入到状态稳定的, 即存在 $\beta \in \mathcal{KL}$ 和 $\gamma \in \mathcal{K}$, 使得对于任意初始状态 $x_1(0)$ 和任意分段连续且有界的 s ,

$$|x_1(t)| \leq \max\{\beta(|x_1(0)|, t), \gamma(\|s\|_\infty)\}, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.269)$$

以 5.2.1 节考虑的由式(5.217)和式(5.218)定义的被控对象为例来验证假设 5.1 的合理性。由变量 s 的定义(5.224)可知, $x_2 = -kx_1 + s$ 。将其代入被控对象的 x_1 -子系统(5.217), 得到的就是线性时不变系统(5.231) (式(5.268)是其更一般的形式)。显然, 系统(5.231)以 s 作为输入是输入到状态稳定的。当然, 由于系统(5.231)是线性时不变系统, 在保证 s 有界的前提下, 第 5.2.1 节通过求取解析解分析了状态 x_1 的有界性, 并在此基础上分析了 x_2 的有界性。对于例 5.18 考虑的由式(5.257)和式(5.258)定义的被控对象, 同样能够找到合适的函数 ϕ , 使得将 x_1 -子系统写成(5.268)的形式后能够满足假设 5.1。详细讨论见后面的例 5.19。

如果状态 (x_1, x_2) 保持在滑动面 S 上, 就有 $s = 0$ 。此时, 假设 5.1 能够保证状态分量 x_1 趋近于零:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0 \quad (5.270)$$

从而实现控制目标。需要说明的是, 闭环系统的状态分量 x_2 未必趋近于零: 由 s 的定义(5.267)可知, $x_2 = s + \phi(x_1)$ 。对照式(5.270), 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \phi(0) \quad (5.271)$$

要使状态 (x_1, x_2) 到达并在此之后保持在滑动面 S 上, 也就是说, 要使 s 到达并在此

之后保持为零, 需要建立 s 和控制输入 u 之间的关系。为此, 求取 s 对时间的导数, 可得

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \dot{x}_2 - \frac{\partial\phi(x_1)}{\partial x_1}\dot{x}_1 \\ &= f_2(x_1, x_2) - \frac{\partial\phi(x_1)}{\partial x_1}f_1(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u\end{aligned}\quad (5.272)$$

注意到该系统与系统(5.225)在形式上是一致的。因此, 考虑采取类似于式(5.226)的控制方式。

具体而言, 设计控制器

$$u = -\text{sign}(s)\frac{\bar{f}_2(x_1, x_2) + \left|\frac{\partial\phi(x_1)}{\partial x_1}\right|\bar{f}_1(x_1, x_2) + c}{g}\quad (5.273)$$

其中, c 是一个正的常数。

将控制器(5.273)代入式(5.272), 可得

$$\begin{aligned}\dot{s} &= f_2(x_1, x_2) - \frac{\partial\phi(x_1)}{\partial x_1}f_1(x_1, x_2) \\ &\quad - g(x_1, x_2)\text{sign}(s)\frac{\bar{f}_2(x_1, x_2) + \left|\frac{\partial\phi(x_1)}{\partial x_1}\right|\bar{f}_1(x_1, x_2) + c}{g}\end{aligned}\quad (5.274)$$

定义

$$V(s) = |s|\quad (5.275)$$

当 $s \neq 0$ 时, 沿系统(5.274)的任意轨迹求取 $V(s)$ 对时间 t 的导数, 都有

$$\begin{aligned}\dot{V}(s) &= \text{sign}(s) \cdot \dot{s} \\ &\leq -\frac{g(x_1, x_2)\left(\bar{f}_2(x_1, x_2) + \left|\frac{\partial\phi(x_1)}{\partial x_1}\right|\bar{f}_1(x_1, x_2) + c\right)}{g} \\ &\quad + |f_2(x_1, x_2)| + \left|\frac{\partial\phi(x_1)}{\partial x_1}\right||f_1(x_1, x_2)| \\ &\leq -c\end{aligned}\quad (5.276)$$

与 5.2.1 节的情形类似, $s(t)$ 在不晚于 $|s(0)|/c$ 的有限时间内到达零并在此之后保持为零。相应地, 状态 (x_1, x_2) 在有限时间内到达并在此之后一直处于滑动面 S 上。

要保证滑模控制器有效, 必须保证原被控对象的状态 (x_1, x_2) 在整个滑模控制过程中有界。为此, 首先分析变量 s 的有界性。由性质(5.276)可知,

$$|s(t)| \leq |s(0)| \leq |x_2(0)| + \bar{\phi}(|x_1(0)|), \quad \forall t \geq 0\quad (5.277)$$

其中,

$$\bar{\phi}(|x_1|) = \max\{\phi(|x_1|), \phi(-|x_1|)\}\quad (5.278)$$

这样就建立了 $|s|$ 的上界与被控对象初始状态大小之间的关系。然而, s 有界尚不足以直接保证 (x_1, x_2) 有界。如下进一步利用闭环系统动态特性来分析 (x_1, x_2) 的有界性。

由假设 5.1 可知, 系统(5.268)以 s 作为输入是输入到状态稳定的。因此, 能够找到一个连续函数 $\alpha_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, 使得

$$\begin{aligned} |x_1(t)| &\leq \max \{ \beta(|x_1(0)|, 0), \gamma(\|s\|_\infty) \} \\ &\leq \max \{ \beta(|x_1(0)|, 0), \gamma(|x_2(0)| + \bar{\phi}(|x_1(0)|)) \} \\ &\leq \alpha_1(|\mathbf{x}(0)|) \end{aligned} \quad (5.279)$$

对所有 $t \geq 0$ 都成立, 其中的第二个不等式用到了性质(5.277)。在此基础上, 利用 s 的定义(5.267), 能够找到一个连续函数 $\alpha_2: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, 使得

$$\begin{aligned} |x_2(t)| &= |\phi(x_1(t)) + s(t)| \\ &\leq |\phi(x_1(t))| + |s(0)| \\ &\leq \bar{\phi}(\alpha_1(|\mathbf{x}(0)|)) + |x_2(0)| + \bar{\phi}(|x_1(0)|) \\ &\leq \alpha_2(|\mathbf{x}(0)|) \end{aligned} \quad (5.280)$$

对所有 $t \geq 0$ 都成立。

综上, 在满足假设 5.1 的前提下, 滑模控制器(5.273)能够使由式(5.249)和式(5.250)定义的被控对象实现期望的控制目标。

定理 5.6 (二阶非线性被控对象的滑模控制) 考虑由式(5.249)和式(5.250)定义的被控对象及控制器(5.273)。如果满足假设 5.1 和条件(5.251)~条件(5.253), 那么对于任意初始状态 $\mathbf{x}(0)$, 闭环系统状态轨迹 $\mathbf{x}(t)$ 有界且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t), x_2(t)) = (0, \phi(0)) \quad (5.281)$$

例 5.19 (不确定非线性被控对象实现滑模控制的算例) 考虑被控对象^[271]:

$$\dot{x}_1 = ax_1^2 x_2 \quad (5.282)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.283)$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, a 是未知常数。但假设已知一个正的常数 $\bar{a} > 0$ 保证 $0 < a \leq \bar{a}$ 。显然, 该被控对象是例 5.18 中由式(5.257)和式(5.258)描述的被控对象的更一般形式 (因为包含未知参数 a), 并且与由式(5.249)和式(5.250)描述的被控对象形式相同。

考虑滑动面

$$S = \{(x_1, x_2) : x_2 = -x_1\} \quad (5.284)$$

并定义状态 (x_1, x_2) 相对于滑动面 S 的误差量

$$s = x_1 + x_2 \quad (5.285)$$

将 $x_2 = -x_1 + s$ 代入被控对象的 x_1 -子系统(5.282), 可得

$$\dot{x}_1 = ax_1^2(-x_1 + s) \quad (5.286)$$

定义

$$V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 \quad (5.287)$$

那么, 不难验证

$$|x_1| \geq \frac{10}{9}|s| \Rightarrow \nabla V_1(x_1)(ax_1^2(-x_1 + s)) \leq -\frac{1}{10}a|x_1|^4 \quad (5.288)$$

根据定理 4.2, 与 x_1 -子系统(5.282)等价的系统(5.286)是输入到状态稳定的。

因此, 由式(5.284)定义的滑动面 S 满足假设 5.1。对 s 求导可得

$$\dot{s} = ax_1^2x_2 + u \quad (5.289)$$

在此基础上, 设计形如式(5.273)的控制器:

$$u = -\text{sign}(s)(\bar{a}x_1^2|x_2| + c) \quad (5.290)$$

其中, c 是一个正的常数。

图 5-15 所示为由式(5.282)和式(5.283)描述的被控对象及控制器(5.290)构成的闭环系统从不同初始状态出发的状态轨迹 (用于数值仿真的被控对象和控制器参数为 $a = 0.4$ 、 $\bar{a} = 0.6$ 、 $c = 0.5$), 验证了所设计滑模控制器的有效性。

当然, 对于具体的被控对象, 对 x_1 -子系统(5.268)的输入到状态稳定性要求 (即假

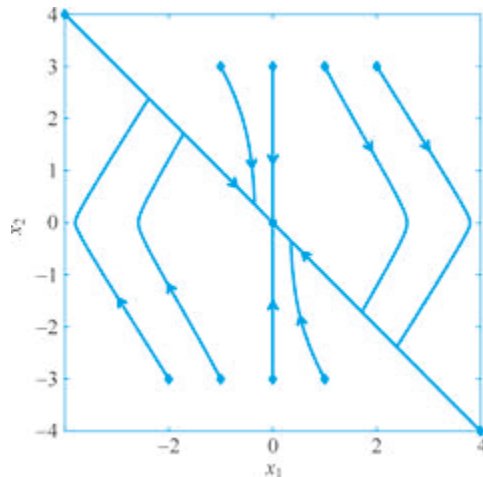


图 5-15 一个滑模控制系统的状态轨迹

设 5.1) 也不一定是必要的。在 s 有界且能够在有限时间内到达零的前提下, 只要保证状态分量 x_1 不会在该有限时间内趋于无穷, 就能保证在滑模控制的抵近过程中状态有界。一类特殊情形是, x_1 -子系统(5.268)的动力学相对于 x_1 是全局李普希茨的, 也就是说, 对于任意 s 都存在一个常数 $L_{f_1} \geq 0$, 使得

$$|f_1(x_1, \phi(x_1) + s) - f_1(x'_1, \phi(x'_1) + s)| \leq L_{f_1} |x_1 - x'_1| \quad \forall x_1, x'_1 \quad (5.291)$$

对于这类系统, 只要 s 有界, 就能保证 x_1 不会在有限时间内趋于无穷。这一点可以利用积分不等式来验证。其实, 5.2.1 节考虑的由式(5.217)和式(5.218)描述的被控对象的 x_1 -子系统就属于一种线性的特例。如下算例也能够验证以上讨论。

例 5.20 (不确定非线性系统实现滑模控制的算例) 考虑如下被控对象

$$\dot{x}_1 = a|x_1|x_2 \quad (5.292)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.293)$$

其中, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, 未知常数 a 满足 $0 < a \leq \bar{a}$ (\bar{a} 已知)。期望设计状态反馈控制器使闭环系统状态 x 有界且趋近于原点。

一种解决方法与例 5.19 类似, 考虑滑动面

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 0\} \quad (5.294)$$

定义

$$s = x_1 + x_2 \quad (5.295)$$

能够验证, 该 x_1 -子系统满足假设 5.1 (其中, $\phi(x_1) = -x_1$)。在此基础上, 设计如下滑模控制器

$$u = -\text{sign}(s)(\bar{a}|x_1|x_2| + c) \quad (5.296)$$

其中, c 是一个正的常数, 能够实现期望的控制目标。

实际上, 饱和的控制方式 $x_2 = -\arctan x_1$ 也能使 x_1 -子系统在原点处全局渐近稳定。具体而言, 可以考虑滑动面

$$S' = \{(x_1, x_2) : \arctan x_1 + x_2 = 0\} \quad (5.297)$$

并取

$$s' = \arctan x_1 + x_2 \quad (5.298)$$

那么, 将 $x_2 = -\arctan x_1 + s'$ 代入式(5.292), 可得

$$\dot{x}_1 = a|x_1|(-\arctan x_1 + s') \quad (5.299)$$

其动力学相对于 x_1 是全局李普希茨的。因此, 只要使状态 \boldsymbol{x} 在有限时间内到达滑动面 S' , 就能保证 x_1 有界。为此, 对 s' 求导, 可得

$$\begin{aligned} s' &= \frac{\partial \arctan x_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ &= \frac{\partial \arctan x_1}{\partial x_1} (a|x_1|x_2) + u \end{aligned} \quad (5.300)$$

考虑控制器

$$u = -\text{sign}(s') \left(\frac{\bar{a}}{2}|x_2| + c \right) \quad (5.301)$$

其中, c 是一个正的常数。那么, s' 在有限时间内收敛至零。图 5-16 所示为上述被控对象分别由控制器(5.296)和控制器(5.301)来控制时从不同初始状态出发的状态轨迹 (用于数值仿真的被控对象和控制器参数为 $a = 0.4$ 、 $\bar{a} = 0.6$ 、 $c = 1$)。

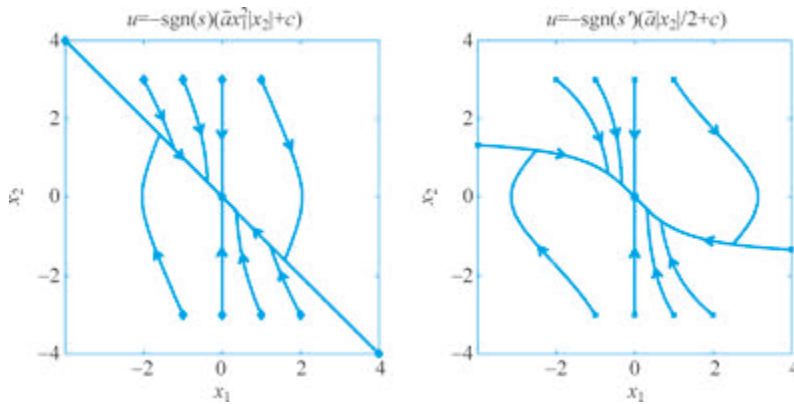


图 5-16 基于不同滑模控制器的闭环系统状态轨迹

5.2.3 多变量被控对象的滑模控制

5.2.2 节考虑的由式(5.249)和式(5.250)描述的被控对象仅包含两个一维的状态分量。本节将滑模控制的思想推广到如下多变量被控对象:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \quad (5.302)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} \quad (5.303)$$

其中, $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1^T, \boldsymbol{x}_2^T]^T \in \mathbb{R}^n$ 是状态, 其包含 $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^{n-p}$ 和 $\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^p$ 两部分, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$ 是控制输入, $\boldsymbol{f}_1: \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ 、 $\boldsymbol{f}_2: \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ 和 $\boldsymbol{g}: \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ 均为未知的局部李普希茨函数。期望设计状态反馈控制器使得闭环系统状态保持有界并且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{x}_1(t) = 0$ 。

对函数 \boldsymbol{f}_1 和 \boldsymbol{f}_2 作类似于式(5.251)和式(5.252)的假设:

- 已知一个函数 $\bar{f}_1: \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$, 使得

$$|\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| \leq \bar{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \quad (5.304)$$

- 已知一个函数 $\bar{f}_2: \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$, 使得

$$|\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| \leq \bar{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \quad (5.305)$$

对于式(5.303)中的高维函数 \mathbf{g} , 将条件(5.253)替换为如下条件:

- 已知一个常数 $\underline{g} > 0$, 使得

$$\frac{1}{2}(\mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}) + \mathbf{g}^T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u})) \geq \underline{g}\mathbf{I}, \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \quad (5.306)$$

同时, 与假设 5.1 类似, 仍然假设 \mathbf{x}_1 -子系统(5.302)是输入到状态稳定的。

假设 5.2 已知一个连续可导的函数 $\phi: \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}^p$, 使得系统

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \phi(\mathbf{x}_1) + \mathbf{s}) \quad (5.307)$$

以 \mathbf{s} 作为输入是输入到状态稳定的, 即存在 $\beta \in \mathcal{KL}$ 和 $\gamma \in \mathcal{K}$, 使得对于任意初始状态 $\mathbf{x}_1(0)$ 和任意分段连续且有界的 \mathbf{s} ,

$$|\mathbf{x}_1(t)| \leq \max\{\beta(|\mathbf{x}_1(0)|, t), \gamma(\|\mathbf{s}\|_\infty)\}, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.308)$$

基于上述条件和假设, 尝试将 5.2.2 节的设计过程推广到高维情形。首先定义滑动面

$$S = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) : \mathbf{x}_2 = \phi(\mathbf{x}_1)\} \quad (5.309)$$

及被控对象状态 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ 到滑动面 S 的误差量

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}_2 - \phi(\mathbf{x}_1) \quad (5.310)$$

求 \mathbf{s} 相对于时间 t 的导数, 可得

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}) - \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u})\mathbf{u} \quad (5.311)$$

与 5.2.2 节不同的是, 此时 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^p$, 也就是说, \mathbf{s} 是高维的。为了设计控制器使 \mathbf{s} 在有限时间到达零, 定义

$$V(\mathbf{s}) = |\mathbf{s}| \quad (5.312)$$

当 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ 时, 沿系统(5.311)的任意轨迹求 $V(\mathbf{s})$ 对时间 t 的导数, 都有

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{s}) &= \frac{\mathbf{s}^T}{|\mathbf{s}|} \dot{\mathbf{s}} \\ &= \frac{\mathbf{s}^T}{|\mathbf{s}|} \left(\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}) - \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u})\mathbf{u} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{s}^T}{|\mathbf{s}|} \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{g}^T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}) \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} \right) \\ &\quad + \bar{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (5.313)$$

如果将 x_{i2} 看作 x_{i1} -子系统的虚拟控制输入, 根据一阶积分器实现状态趋同的结果 (比如例 2.21 考虑的情形), 可以考虑如下形式的分布式控制器

$$x_{i2} = -\frac{1}{n_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \phi(x_{i1} - x_{j1}) \quad (5.321)$$

这里, 集合 $\mathcal{N}_i \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ 的元素是能够向自主体 i 提供状态信息的其他自主体的标号, n_i 表示 \mathcal{N}_i 的元素个数。为了简化讨论, 设 $\mathcal{N}_i \neq \emptyset$, 并且只要 $j \in \mathcal{N}_i$ 就有 $i \in \mathcal{N}_j$ 。也就是说, 每个自主体都至少与一个其他自主体交换信息, 并且自主体之间的信息交换是相互的。函数 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续可导、严格递增的奇函数, 且满足

$$|\phi(r)| \leq c_\phi, \quad \left| \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} \right| \leq L_\phi, \quad \forall r \quad (5.322)$$

其中, c_ϕ 和 L_ϕ 都是正的常数。比如, 可以取

$$\phi(r) = c_\phi \arctan\left(\frac{L_\phi r}{c_\phi}\right) \quad (5.323)$$

在此基础上, 为整个多自主体系统定义滑动面

$$S = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_N) : x_{i2} = -\frac{1}{n_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \phi(x_{i1} - x_{j1}), i = 1, 2, \dots, N \right\} \quad (5.324)$$

及状态 (x_1, x_2, \dots, x_N) 相对滑动面 S 的误差量

$$s = [s_1, s_2, \dots, s_N]^T \quad (5.325)$$

其中,

$$s_i = x_{i2} + \frac{1}{n_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \phi(x_{i1} - x_{j1}), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.326)$$

求每个 s_i 对时间的导数, 可得

$$\dot{s}_i = u_i + \varphi_i(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{N1}) \quad (5.327)$$

其中,

$$\varphi_i(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{N1}) = \frac{1}{n_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\partial \phi(x_{i1} - x_{j1})}{\partial (x_{i1} - x_{j1})} (\dot{x}_{i1} - \dot{x}_{j1}) \quad (5.328)$$

利用函数 ϕ 的性质(5.322), 不难验证

$$|\varphi_i(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{N1})| \leq L_\phi \left(|s_i| + \frac{1}{n_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} |s_j| + 2c_\phi \right) \quad (5.329)$$

为了设计控制器使所有的 s_i 都在有限时间内到达零, 取所有 $|s_i|$ 中最大的一个, 并将其标号记为 i^* , 即

$$|s_{i^*}| \geq \max_{i=1,2,\dots,N} |s_i| \quad (5.330)$$

由式(5.327)和式(5.329)不难验证:

- 当 $s_{i^*} > 0$ 时,

$$\dot{s}_{i^*} \leq u_{i^*} + 2L_\phi(|s_{i^*}| + c_\phi) \quad (5.331)$$

- 当 $s_{i^*} < 0$ 时,

$$\dot{s}_{i^*} \geq u_{i^*} - 2L_\phi(|s_{i^*}| + c_\phi) \quad (5.332)$$

于是, 为每个自主体设计控制器

$$u_i = -\text{sign}(s_i)(2L_\phi(|s_i| + c_\phi) + c) \quad (5.333)$$

其中 c 是一个正的常数。该控制器能够在闭环系统状态轨迹有定义的前提下保证 $\max_{i=1,2,\dots,N} |s_i|$ 保持有界且在有限时间内到达零。这样就能保证, 所有的 s_i 都保持有界且在有限时间内到达零。而 s_i 有界又保证每个自主体的状态 x_i 都不会在有限时间内发散到无穷远。当所有的 s_i 都到达零之后, 整个受控的多自主体系统的状态将沿滑动面 S 运动并实现式(5.320), 也就是实现输出趋同。该结果可自然地推广到 x_{i1} 和 x_{i2} 为向量的情形。

5.2.4 滑模控制器的连续化近似

执行机构在工作过程中难免存在未建模的动态响应, 其与非连续的滑模控制器相互作用可能引发“抖振”现象。图 5-17 所示的是由滑动面不同侧的切换和被控对象中的未建模动态导致抖振的示意图。

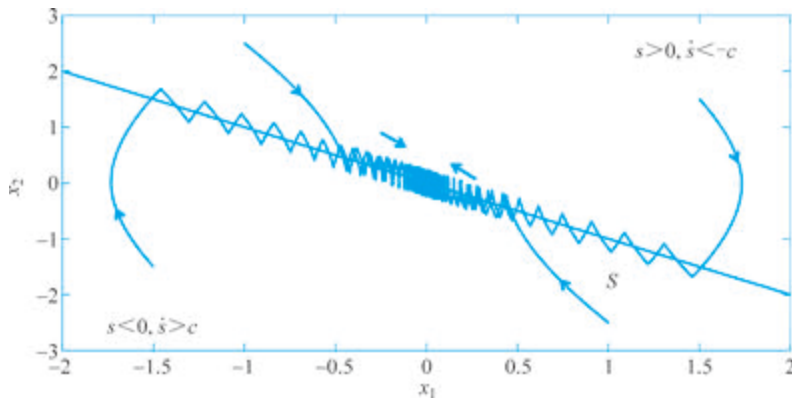


图 5-17 滑动面附近的抖振

消除抖振的一种实用方法是对滑模控制器中非连续的符号函数 sign 作连续化处理。比如, 利用幅值受限的线性函数 sat 来近似符号函数 sign :

$$\text{sat}\left(\frac{s}{\epsilon}\right) = \begin{cases} \text{sign}(s), & |s| \geq \epsilon \text{ 时} \\ \frac{s}{\epsilon}, & |s| < \epsilon \text{ 时} \end{cases} \quad (5.334)$$

其中, ϵ 是一个正的常数。

以 5.2.2 节考虑的由式(5.249)和式(5.250)描述的被控对象为例。将控制器(5.273)中的 $\text{sign}(s)$ 替换为 $\text{sat}(s/\epsilon)$ ，可以得到连续的控制

$$u = -\text{sat}\left(\frac{s}{\epsilon}\right) \frac{\bar{f}_2(x_1, x_2) + \left| \frac{\partial \phi(x_1)}{\partial x_1} \right| \bar{f}_1(x_1, x_2) + c}{g} \quad (5.335)$$

通过与式(5.276)类似的推导可以看出，该连续控制器能够保证：

$$|s| \geq \epsilon \Rightarrow \dot{V}(s) \leq -c \quad (5.336)$$

也就是说， s 会在有限时间内到达 $|s| \leq \epsilon$ 的范围内并停留于其中。相应地，状态 (x_1, x_2) 在有限时间内到达

$$S' = \{(x_1, x_2) : |x_2 - \phi(x_1)| \leq \epsilon\} \quad (5.337)$$

但不能保证其趋近于原滑动面 S 。不妨将 S' 当作广义的滑动面（虽然 S' 并不是面）；如图 5-18 所示。

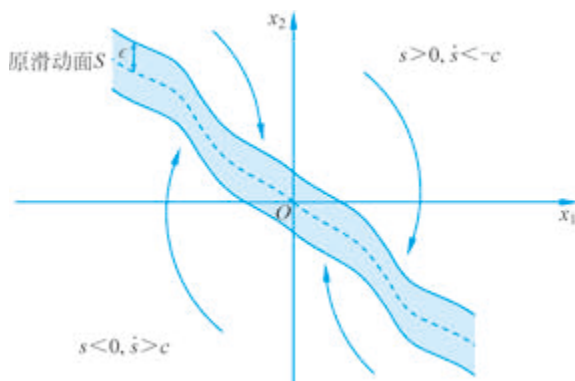


图 5-18 广义的滑动面

在广义的滑动面 S' 中，不能保证 $s = 0$ ，也就不能保证 (x_1, x_2) 趋近于 $(0, \phi(0))$ 。但是，仍然可以利用输入到状态稳定性的性质来保证 (x_1, x_2) 最终到达 $(0, \phi(0))$ 附近。具体而言，只要闭环系统的状态 (x_1, x_2) 处于广义的滑动面 S' 中，就能保证 $|s| \leq \epsilon$ 。那么，在满足假设 5.1 的前提下，由输入到状态稳定性的渐近增益性质（见 4.1.1 节）可知

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |x_1(t)| \leq \gamma(\epsilon) \quad (5.338)$$

而由 s 的定义(5.267)可知， $x_2 = \phi(x_1) + s$ 。因此，

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |x_2(t)| \leq \max_{|\epsilon'| \leq \gamma(\epsilon)} \{\phi(\epsilon')\} + \epsilon \quad (5.339)$$

通过将控制器(5.335)中的参数 ϵ 选取得充分小，能够保证闭环系统状态 (x_1, x_2) 趋近于原点的一个充分小的邻域内。

综上所述，对于由式(5.249)和式(5.250)描述的被控对象，将滑模控制器(5.273)中的符

号函数替换为饱和函数后得到的连续控制器(5.335)能够保证闭环系统状态 (x_1, x_2) 有界并最终停留在 $(0, \phi(0))$ 的一个邻域内,但不能保证状态 (x_1, x_2) 趋近于 $(0, \phi(0))$ 。而通过选取充分小的 ϵ , 能够使闭环系统状态最终所收敛到的区域充分小。

5.3 反步法

反馈线性化需要精确的被控对象模型,而滑模控制则主要考虑(广义)二阶被控对象。对于高阶不确定非线性被控对象,反步法能够充分利用子系统之间的串联关联结构及非线性动力学特性,从被控输出开始不断将更高阶次的状态分量看作虚拟控制量并设计理想控制器,直至真正的控制输入出现,从而以迭代的方式设计出具有广义串联结构的控制器。

5.3.1 基本思想

直观而言,反步法将串联控制的思想推广到了非线性被控对象。

例 5.22 (串联控制和控制器迭代设计) 考虑如下被控对象^[18]:

$$\dot{x}_1 = \cos x_1 - x_1^3 + x_2 \quad (5.340)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.341)$$

其中, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入。期望设计状态反馈控制器使闭环系统状态 x 有界且状态分量 x_1 (即输出) 趋近于零。例 5.15 利用反馈线性化解决该问题,而本例则尝试更充分地利用被控对象结构和动力学特性来设计更直观的控制器的。

不难发现,该被控对象具有“串联”结构:第一个状态分量 x_1 受到第二个状态分量 x_2 的作用,而第二个状态分量 x_2 受到控制输入 u 的作用,如图 5-19 所示。

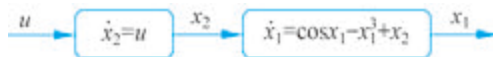


图 5-19 一个串联被控对象

对于这种结构的被控对象,工程上常采用串联控制的办法。具体而言,首先定义误差变量

$$e_1 = x_1 \quad (5.342)$$

对 e_1 求导可得

$$\dot{e}_1 = \cos e_1 - e_1^3 + x_2 \quad (5.343)$$

将 x_2 看作 e_1 -子系统的“虚拟”控制输入。理想的情况是,直接要求 $x_2 = x_2^* = -\cos e_1$,那么 $\dot{e}_1 = -e_1^3$,从而保证 e_1 趋近于零。如图 5-20 所示。

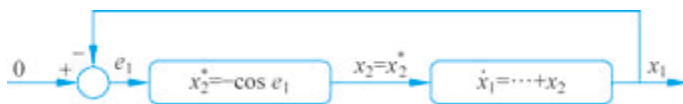


图 5-20 控制串级被控对象：理想情况

但是，由于 x_2 本身是被控对象的一个状态分量，其取值受到被控对象动力学的约束并受到控制输入的影响，因此不能直接要求 $x_2 = -\cos e_1$ 。

一个直观的解决思路是通过调整 u 使 x_2 趋近于 $x_2^* = -\cos e_1$ 。此时， $x_2^* = -\cos e_1$ 被看作是 x_1 -子系统的理想控制输入。

为此，定义 x_2 相对于 x_2^* 的误差变量

$$e_2 = x_2 - x_2^* = x_2 + \cos e_1 \quad (5.344)$$

此时，可以将 e_1 -子系统等价地写成

$$\dot{e}_1 = -e_1^3 + e_2 \quad (5.345)$$

求 e_2 相对时间的导数，可得

$$\dot{e}_2 = u - \sin e_1 (-e_1^3 + e_2) \quad (5.346)$$

对于由式(5.345)和式(5.346)描述的误差系统，定义

$$V(e_1, e_2) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 \quad (5.347)$$

作为候选的李雅普诺夫函数。沿该误差系统的任意轨迹求 $V(e_1, e_2)$ 对时间的导数，都有

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_1, e_2) &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 \\ &= -e_1^4 + e_1 e_2 + e_2 (u - \sin e_1 (-e_1^3 + e_2)) \\ &\leq -\frac{1}{2}e_1^4 + e_1 e_2 + 8e_2^4 + e_2^2 + u e_2 \end{aligned} \quad (5.348)$$

设计控制器

$$u = -e_1 - 2e_2 - 8e_2^3 \quad (5.349)$$

那么，

$$\dot{V}(e_1, e_2) \leq -\frac{1}{2}e_1^4 - e_2^2 \quad (5.350)$$

根据李雅普诺夫稳定定理(定理 2.2)，以 (e_1, e_2) 为状态的闭环系统(其包括式(5.345)、式(5.346)和式(5.349))在原点处全局渐近稳定。相应地，对于由式(5.340)和式(5.341)描述的原被控对象，控制器(5.349)能够实现期望的控制目标。

从串级控制的角度来看， $x_1 = e_1$ 是外环输出，外环设定值是零， $x_2^* = -\cos e_1$ 是外环控制器的输出同时也是内环控制器的设定值，而内环控制器的输出就是被控对象的控制

输入 u 。图 5-21 所示为上述控制系统的框图，呈现串级结构特征。当然，为了克服外环误差 e_1 对内环动力学（见式(5.346)）的影响，控制器(5.349)中引入了与 e_1 有关的项（如图 5-21 中虚线所示）。

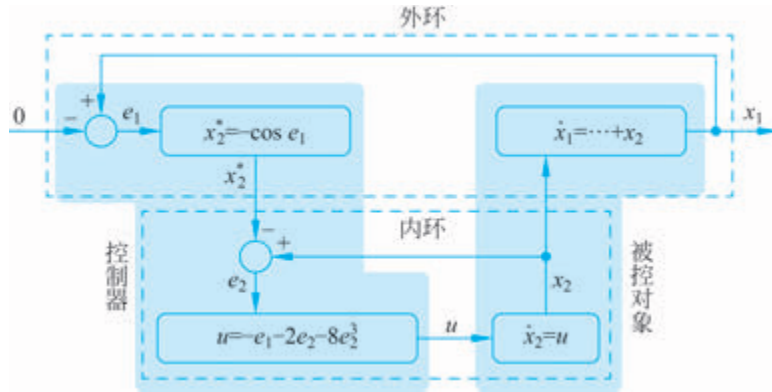


图 5-21 串级被控对象、串级控制及迭代设计

与基于反馈线性化的控制器(5.209)相比，控制器(5.349)更好地结合了被控对象的结构特征，其能够充分利用被控对象非线性动力学中有助于稳定的部分（ x_1 -子系统的 $-x_1^3$ 项），而不是直接将其抵消掉，因此也不要求被控对象模型精确已知。比如，即使上述被控对象模型中的 $-x_1^3$ 项被替换为 $-ax_1^3$ （未知常数 $a > 0$ ），上述控制器设计过程仍然有效。

例 5.15 中从被控对象的输出开始，通过理想控制器和控制误差依次反推迭代最终设计出控制器的过程被称作反步法。

进一步考虑由式(5.340)和式(5.341)描述的被控对象的更一般形式：

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \quad (5.351)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.352)$$

其中， $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态， $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入， $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是局部李普希茨的函数。期望设计状态反馈控制器使闭环系统状态 x 有界且状态分量 x_1 趋近于原点。

直观而言，在该被控对象中，控制输入 u 直接作用于状态 x_2 ，然后再通过状态 x_2 间接作用于状态 x_1 。因此，可以将 x_2 看作 x_1 -子系统的“虚拟”控制输入。这种虚拟控制的思想在 5.2 节设计滑模控制器时就已用到。在滑模控制中，假设存在一个 ϕ 使得如果 $x_2 = \phi(x_1) + s$ ，那么受控的 x_1 -子系统以 s 作为输入是输入到状态稳定的（见假设 5.1）。基于这一假设，5.2 节设计了非连续的控制器的使 x_2 在有限时间内到达 $\phi(x_1)$ 。

本节同样用到“虚拟”控制的思想，但并不要求 x_2 在有限时间内到达 $\phi(x_1)$ ，而是通过连续（甚至光滑）的控制方式使 x_2 趋近于 $\phi(x_1)$ ，并同时使 x_1 趋近于零。这种连续的

控制方式有助于实现多次迭代设计, 进而处理更高阶次的被控对象。相应地, 可以通过构造李雅普诺夫函数或利用关联系统的工具 (比如无源定理、小增益定理等) 来保证闭环系统的状态有界性与收敛性。

假设 5.3 已知一个光滑函数 $\phi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 使得系统

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)\phi_1(x_1) \quad (5.353)$$

在原点处全局渐近稳定, 并具有一个连续可导的李雅普诺夫函数 V_1 满足下列条件:

- 存在 $\underline{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1 \in \mathcal{K}_\infty$, 使得

$$\underline{\alpha}_1(|x_1|) \leq V_1(x_1) \leq \bar{\alpha}_1(|x_1|), \quad \forall x_1 \quad (5.354)$$

- 存在连续且正定的函数 $\alpha_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, 使得

$$\frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1} (f_1(x_1) + g_1(x_1)\phi_1(x_1)) \leq -\alpha_1(|x_1|), \quad \forall x_1 \quad (5.355)$$

基于该假设, 直观上来看, 要使 x_1 趋近于零, 只需使 x_2 趋近于 $\phi_1(x_1)$ (当然, 真正要保证这一点, 还需要严格的分析)。为此, 定义 x_2 相对 $\phi_1(x_1)$ 的跟踪误差

$$e_2 = x_2 - \phi_1(x_1) \quad (5.356)$$

同时, 为了统一符号, 定义

$$e_1 = x_1 \quad (5.357)$$

那么, 可以将 x_1 -子系统重新写成

$$\dot{e}_1 = f_1(e_1) + g_1(e_1)(\phi_1(e_1) + e_2) \quad (5.358)$$

而对 e_2 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \frac{\partial \phi_1(e_1)}{\partial e_1} \dot{e}_1 \\ &= u - \frac{\partial \phi_1(e_1)}{\partial e_1} (f_1(e_1) + g_1(e_1)(\phi_1(e_1) + e_2)) \end{aligned} \quad (5.359)$$

这样就将原被控对象转化成了一个由式(5.358)和式(5.359)描述的新的误差系统, 以误差变量 $e = (e_1, e_2)$ 作为新的状态。不仅如此, 只要使 e 有界且 e_1 趋近于零, 就能使 x 有界且 x_1 趋近于零。

注意到 e_1 -子系统(5.358)和 e_2 -子系统(5.359)相互影响, 考虑为其整体构造一个李雅普诺夫函数来分析整个闭环系统的稳定性。为此, 定义

$$V(e_1, e_2) = V_1(e_1) + \frac{1}{2}e_2^2 \quad (5.360)$$

作为候选李雅普诺夫函数, 其中的 V_1 是由假设 5.3 给出的。那么, 沿着由式(5.358)和式(5.359)定义的任意轨迹求 $V(e_1, e_2)$ 对时间的导数, 并利用假设 5.3, 都有

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e_1, e_2) &= \dot{V}_1(e_1) + e_2 \dot{e}_2 \\
&= \frac{\partial V_1(e_1)}{\partial e_1} (f_1(e_1) + g_1(e_1)(\phi_1(e_1) + e_2)) \\
&\quad + e_2 \left(u - \frac{\partial \phi_1(e_1)}{\partial e_1} (f_1(e_1) + g_1(e_1)(\phi_1(e_1) + e_2)) \right) \\
&\leq -\alpha_1(|e_1|) \\
&\quad + e_2 \left(\frac{\partial V_1(e_1)}{\partial e_1} g_1(e_1) - \frac{\partial \phi_1(e_1)}{\partial e_1} (f_1(e_1) + g_1(e_1)(\phi_1(e_1) + e_2)) \right) \\
&\quad + e_2 u
\end{aligned} \tag{5.361}$$

设计控制器

$$u = -k_2 e_2 - \frac{\partial V_1(e_1)}{\partial e_1} g_1(e_1) + \frac{\partial \phi_1(e_1)}{\partial e_1} (f_1(e_1) + g_1(e_1)(\phi_1(e_1) + e_2)) \tag{5.362}$$

其中, k_2 是一个正的常数。

将控制器(5.362)代入式(5.361), 可得

$$\dot{V}(e_1, e_2) \leq -\alpha_1(|e_1|) - k_2 e_2^2 \tag{5.363}$$

根据李雅普诺夫稳定定理(定理 2.2), 由误差系统(见式(5.358)和式(5.359))及控制器(5.362)构成的闭环系统(以 $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ 作为状态)在原点处全局渐近稳定。又注意到

$$x_1 = e_1 \tag{5.364}$$

$$x_2 = \phi_1(x_1) + e_2 \tag{5.365}$$

因此, 原被控对象的状态 x_1 和 x_2 有界, 并且 x_1 趋近于零而 x_2 趋近于 $\phi_1(0)$ 。

定理 5.8 (二阶非线性被控对象的反步法控制器设计) 在满足假设 5.3 的情况下, 考虑由式(5.351)和式(5.352)描述的被控对象及控制器(5.362)构成的闭环系统。对于任意初始状态 $\mathbf{x}(0)$, 系统状态轨迹 $\mathbf{x}(t)$ 有界且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t), x_2(t)) = (0, \phi_1(0)) \tag{5.366}$$

以上就是利用反步法设计控制器的一般过程。控制器(5.362)本质上是在抵消 e_2 -子系统的非线性动力学的基础上进一步施加了负反馈。但结合具体的被控对象可以灵活地运用反步法来设计控制器。比如, 例 5.22 利用被控对象动力学中的稳定因素来简化控制器设计。此外, 对于一些被控对象, 即使难以找到 ϕ_1 使 x_1 -子系统满足假设 5.3, 也可以应用反步法。

例 5.23 (反步法实现全局渐近镇定) 考虑被控对象^[18]:

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2 \tag{5.367}$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.368)$$

其中, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入。期望设计状态反馈控制器使闭环系统状态有界并且 x_1 趋近于零。

取

$$\phi_1(x_1) = -x_1^2, \quad V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 \quad (5.369)$$

那么,

$$\frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1}(x_1\phi_1(x_1)) = -x_1^4 \quad (5.370)$$

因此, x_1 -子系统满足假设 5.3。

将 x_2 看作 x_1 -子系统的虚拟控制输入, 并期望 x_2 趋近于 $\phi_1(x_1)$ 。为此, 定义

$$e_2 = x_2 - \phi_1(x_1) \quad (5.371)$$

同时, 为了统一符号, 定义

$$e_1 = x_1 \quad (5.372)$$

那么, 可以将 x_1 -子系统(5.367)重新写作

$$\dot{e}_1 = e_1(-e_1^2 + e_2) \quad (5.373)$$

而对 e_2 求导, 可得

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \frac{\partial \phi_1(e_1)}{\partial e_1} \dot{e}_1 = u - 2e_1^2(e_1^2 - e_2) \quad (5.374)$$

定义

$$V(e_1, e_2) = V_1(e_1) + \frac{1}{2}e_2^2 \quad (5.375)$$

作为候选的李雅普诺夫函数。那么, 沿着由式(5.373)和式(5.374)定义的任意轨迹求 $V(e_1, e_2)$ 对时间的导数, 都有

$$\dot{V}(e_1, e_2) = -e_1^4 + e_2(e_1^2 + u - 2e_1^2(e_1^2 - e_2)) \quad (5.376)$$

设计控制器

$$u = -e_2 + e_1^2(2e_1^2 - 2e_2 - 1) \quad (5.377)$$

能够保证

$$\dot{V}(e_1, e_2) = -e_1^4 - e_2^2 \quad (5.378)$$

利用全局渐近稳定判据(定理 2.2)能够验证以 (e_1, e_2) 作为状态的闭环系统在原点处全局渐近稳定。相应地, 被控对象原本的状态 (x_1, x_2) 保持有界并趋近于 $(0, 0)$ 。

对于由式(5.367)和式(5.368)定义的被控对象, 将上述理想控制器中的 $\phi_1(x_1)$ 换成满足特定条件的其他函数也能达到目的。比如考虑使用

$$\phi_1'(x_1) \equiv 0 \quad (5.379)$$

取代 $\phi(x_1)$, 并取

$$V_1'(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 \quad (5.380)$$

那么,

$$\frac{\partial V_1'(x_1)}{\partial x_1}(x_1\phi_1(x_1)) = 0 \quad (5.381)$$

此时, x_1 -子系统不满足假设 5.3 要求的渐近稳定条件, 而仅在原点处稳定。

将 x_2 看作 x_1 -子系统的虚拟控制输入, 并期望使 x_2 趋近于 $\phi_1'(x_1)$ 。为此, 定义

$$e_2' = x_2 - \phi_1'(x_1) = x_2 \quad (5.382)$$

同时, 为了统一符号, 定义

$$e_1' = x_1 \quad (5.383)$$

那么, 可以将 x_1 -子系统(5.367)重新写作

$$\dot{e}_1' = e_1'e_2' \quad (5.384)$$

而对 e_2' 求导, 可得

$$\dot{e}_2' = \dot{x}_2 = u \quad (5.385)$$

定义

$$V'(e_1', e_2') = V_1'(e_1') + \frac{1}{2}e_2'^2 \quad (5.386)$$

作为候选李雅普诺夫函数。那么, 沿着由式(5.384)和式(5.385)定义的任意轨迹求 $V'(e_1', e_2')$ 对时间的导数, 都有

$$\dot{V}'(e_1', e_2') = -e_1'^2 e_2' + e_2' u \quad (5.387)$$

设计控制器

$$u = -e_2' + e_1'^2 \quad (5.388)$$

能够保证

$$\dot{V}'(e') = -e_2'^2 \quad (5.389)$$

利用李雅普诺夫稳定定理(定理 2.1)能够证明以 (e_1', e_2') 作为状态的闭环系统(由式(5.384)、式(5.385)、式(5.388)组成) 在原点处稳定, 但尚不能证明渐近稳定。进一步利用不变集原

理(定理 2.10)能够证明状态 (e'_1, e'_2) 趋近于零。同样是运用反步法,充分利用被控对象动态特性设计出的控制器(5.388)比控制器(5.377)要简洁得多。

上述反步法设计过程中每一步新增的变量都是标量。但是,反步法的适用范围绝不仅限于单变量系统。

例 5.24 (差速驱动小车的轨迹跟踪控制^[69]) 考虑由(5.50)给出的小车模型。控制目标是使小车的位置 $\mathbf{p} = [p_x, p_y, \theta]^T$ 跟踪期望轨迹 $\mathbf{p}^r = [p_x^r, p_y^r, \theta^r]^T$ 。而这个期望轨迹是由如下参考模型生成的:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x^r \\ \dot{p}_y^r \\ \dot{\theta}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta^r & 0 \\ \sin \theta^r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^r \\ \omega^r \end{bmatrix} \quad (5.390)$$

其中, $\theta^r \in \mathbb{R}$ 、 $v^r \in \mathbb{R}$ 、 $\omega^r \in \mathbb{R}$ 分别表示期望的方向角、线速度、方向角速度。不失一般性,假设 $\omega^r(t)$ 、 $v^r(t)$ 、 $\dot{\omega}^r(t)$ 、 $\dot{v}^r(t)$ 对所有 $t \geq 0$ 都有界。同时,假设 $v^r \neq 0$ 。为了表示跟踪效果,在固联于小车的坐标系中分别定义方向角、线速度、方向角速度的误差变量:

$$\begin{bmatrix} p_x^e \\ p_y^e \\ \theta^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x^r - p_x \\ p_y^r - p_y \\ \theta^r - \theta \end{bmatrix} \quad (5.391)$$

见例 2.44 及图 2-37。

对上述误差变量求导,可得

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x^e \\ \dot{p}_y^e \\ \dot{\theta}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_y^e \omega - v + v^r \cos \theta^e \\ -p_x^e \omega + v^r \sin \theta^e \\ -\omega + \omega^r \end{bmatrix} \quad (5.392)$$

首先考虑 p_y^e -子系统,将 p_x^e 和 θ^e 视作其虚拟控制输入。不难验证,在 $|v^r|$ 具有正的下界的情况下,如果

$$p_x^e = 0 \quad (5.393)$$

$$\theta^e = -\arctan(v^r p_y^e) =: -\varphi(v^r p_y^e) \quad (5.394)$$

那么 p_y^e -子系统满足

$$\dot{p}_y^e = -v^r \sin(\varphi(v^r p_y^e)) \quad (5.395)$$

其在原点处全局渐近稳定（可以选取二次型的李雅普诺夫函数来验证）。

借助反步法的思想，与两个虚拟控制输入对应，分别定义如下误差变量

$$\tilde{p}_x^e = p_x^e, \quad \tilde{\theta}^e = \theta^e + \varphi(v^r p_y^e) \quad (5.396)$$

相应地，将 p_y^e -子系统重新写成

$$\dot{p}_y^e = -p_x^e \omega + v^r \sin(-\varphi(v^r p_y^e) + \tilde{\theta}^e) \quad (5.397)$$

或者等价地，

$$\dot{p}_y^e = -p_x^e \omega + v^r \left(\sin(-\varphi(v^r p_y^e)) + \tilde{\theta}^e \eta \right) \quad (5.398)$$

其中，

$$\eta = \int_0^1 \cos(-\varphi(v^r p_y^e) + r \tilde{\theta}^e) dr \quad (5.399)$$

而对误差变量 \tilde{p}_x^e 和 $\tilde{\theta}^e$ 求导可得

$$\dot{\tilde{p}}_x^e = p_y^e \omega - v + v^r \cos \theta^e \quad (5.400)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}}^e &= -\omega + \omega^r + \varphi'(v^r p_y^e) (-\omega \tilde{p}_x^e v^r + (v^r)^2 \sin \theta^e + p_y^e \dot{v}^r) \\ &= -(1 + \varphi'(v^r p_y^e) \tilde{p}_x^e v^r) \omega + \omega^r + \varphi'(v^r p_y^e) ((v^r)^2 \sin \theta^e + p_y^e \dot{v}^r) \end{aligned} \quad (5.401)$$

其中， φ' 表示函数 φ 的导函数。

对于由式(5.398)、式(5.400)和式(5.401)构成的误差系统，定义

$$V(p_y^e, \tilde{p}_x^e, \tilde{\theta}^e) = \frac{1}{2}(p_y^e)^2 + \frac{1}{2}(\tilde{p}_x^e)^2 + \frac{1}{2\gamma}(\tilde{\theta}^e)^2 \quad (5.402)$$

作为候选李雅普诺夫函数，其中 γ 是一个正的常数。那么，沿着该误差系统的任意轨迹，都有

$$\begin{aligned} \dot{V}(p_y^e, \tilde{p}_x^e, \tilde{\theta}^e) &= p_y^e \left(-p_x^e \omega + v^r \left(\sin(-\varphi(v^r p_y^e)) + \tilde{\theta}^e \eta \right) \right) \\ &\quad + \tilde{p}_x^e (p_y^e \omega - v + v^r \cos \theta^e) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^e \left(-\omega + \omega^r \right. \\ &\quad \left. + \varphi'(v^r p_y^e) (-\omega \tilde{p}_x^e v^r + (v^r)^2 \sin \theta^e + p_y^e \dot{v}^r) \right) \end{aligned} \quad (5.403)$$

设计控制器

$$v = c_1 \tilde{p}_x^e + v^r \cos \theta^e \quad (5.404)$$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{1 + \varphi'(v^r p_y^e) \tilde{p}_x^e v^r} \left(\gamma \eta p_y^e v^r + \omega^r \right. \\ &\quad \left. + \varphi'(v^r p_y^e) ((v^r)^2 \sin \theta^e + p_y^e \dot{v}^r) + c_2 \gamma \tilde{\theta}^e \right) \end{aligned} \quad (5.405)$$

其中, c_1 和 c_2 均为正的常数。可以验证,

$$\dot{V}(p_y^e, \tilde{p}_x^e, \tilde{\theta}^e) = -c_1(\tilde{p}_x^e)^2 - p_y^e v^r \sin(\varphi(p_y^e v^r)) - c_2(\tilde{\theta}^e)^2 \quad (5.406)$$

利用李雅普诺夫稳定定理(定理 2.1)能够证明,当误差状态的初始值 $(p_y^e(0), \tilde{p}_x^e(0), \tilde{\theta}^e(0))$ 充分小的时候,上述控制器始终有定义且误差系统状态 $(p_y^e, \tilde{p}_x^e, \tilde{\theta}^e)$ 趋近于零。此外,为便于讨论,本例直接为虚拟控制输入 θ^e 选取了 \arctan 形式的理想控制器(见式(5.394))。其实,将 \arctan 函数替换为过零、单调递增且取值不超过 $(-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon)$ 范围(其中 $0 < \epsilon < \pi$)的连续可导函数,上述设计过程仍然是有效的。在本例基础上,通过改进控制器设计还能进一步放宽对 v^r 的要求以及实现全局的轨迹跟踪控制。详细证明和讨论见文献[69]。

考虑参考模型中 $v^r(t) \equiv 1$ 、 $\omega^r(t) \equiv 0.1$, 控制器参数 $c_1 = c_2 = 1$ 、 $\gamma = 10$ 。图 5-22 所示为受控的差速驱动小车从不同初始位置出发的位置轨迹及误差状态轨迹。

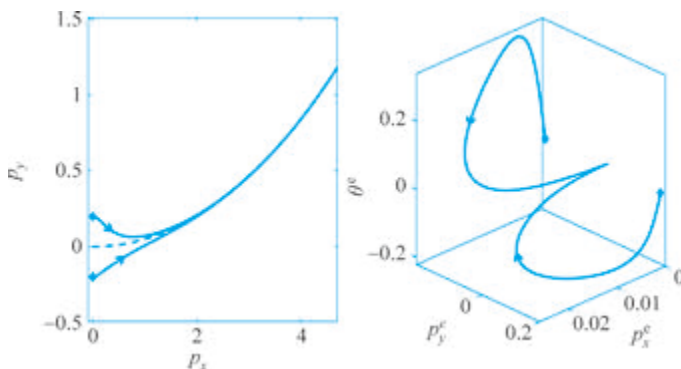


图 5-22 反步法控制差速驱动小车实现轨迹跟踪控制

当被控对象中包含未知参数时,可以在基于反步法的控制器中引入参数更新机制实现自适应控制。

例 5.25 (自适应反步法) 考虑被控对象^[18]:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta\varphi(x_1) \quad (5.407)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.408)$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, $\theta \in \mathbb{R}$ 是未知常数, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑函数。

如果 θ 已知,可以利用本节介绍的反步法解决该被控对象的控制问题。定义误差变量

$$e_1 = x_1 \quad (5.409)$$

对误差变量 e_1 求导并利用式(5.407), 可得

$$\dot{e}_1 = x_2 + \theta\varphi(e_1) \quad (5.410)$$

将 x_2 看作 e_1 -子系统的虚拟控制输入, 设计理想控制器

$$\phi(e_1) = -k_1 e_1 - \theta \varphi(e_1) \quad (5.411)$$

其中, k_1 是一个正的常数, 并定义新的误差变量

$$e_2 = x_2 - \phi(e_1) \quad (5.412)$$

于是, 可以将 e_1 -子系统写成

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + e_2 \quad (5.413)$$

而对新的误差变量 e_2 求导并利用式(5.407)和式(5.408), 可得

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= u - \frac{\partial \phi(e_1)}{\partial e_1} \dot{e}_1 \\ &= u - \frac{\partial \phi(e_1)}{\partial e_1} (x_2 + \theta \varphi(e_1)) \end{aligned} \quad (5.414)$$

设计控制器

$$u = -k_2 e_2 - e_1 + \frac{\partial \phi(e_1)}{\partial e_1} (x_2 + \theta \varphi(e_1)) \quad (5.415)$$

其中, k_2 是一个正的常数。那么, 可以得到如下受控的 e_2 -子系统:

$$\dot{e}_2 = -e_1 - k_2 e_2 \quad (5.416)$$

通过以上设计, 最终得到如下闭环系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (5.417)$$

其在原点处全局渐近稳定, 可以取如下李雅普诺夫函数来验证

$$V(e) = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} e_2^2 \quad (5.418)$$

下面探讨参数 θ 未知的情况。对于这种情况, 考虑在反步法设计过程中引入自适应机制。仍然定义误差变量

$$e_1 = x_1 \quad (5.419)$$

那么, 可以将 e_1 -子系统写成如式(5.410)所示的形式。将 x_2 看作 e_1 -子系统的虚拟控制输入。由于 θ 未知, 因此理想控制器(5.411)不能实现。考虑使用参数估计值 $\hat{\theta}$ 替代参数真实值 θ , 设计如下理想控制器

$$\phi(e_1, \hat{\theta}) = -k_1 e_1 - \hat{\theta} \varphi(e_1) \quad (5.420)$$

其中, k_1 是一个正的常数, 并同时定义新的误差变量

$$e_2 = x_2 - \phi(e_1, \hat{\theta}) \quad (5.421)$$

那么, 可以进一步将 e_1 -子系统写成

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + e_2 - \tilde{\theta} \varphi(e_1) \quad (5.422)$$

其中,

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta \quad (5.423)$$

是参数估计误差。

对于 e_1 -子系统(5.422), 当 $e_2 \equiv 0$ 时, 期望为 $\hat{\theta}$ 设计更新律同时保证控制误差 e_1 和参数估计误差 $\tilde{\theta}$ 均有界并使 e_1 趋近于零。因此, 为 e_1 -子系统定义的候选李雅普诺夫函数时, 不仅要考虑 e_1 而且要考虑 $\tilde{\theta}$ 。为此, 定义候选李雅普诺夫函数

$$V_1(e_1, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2b} \tilde{\theta}^2 \quad (5.424)$$

其中, b 是一个正的常数。对于自适应控制系统, 这是一种常见的李雅普诺夫函数选取方式(见例 2.40)。

沿着 e_1 -子系统(5.422)的任意轨迹求 $V_1(e_1, \tilde{\theta})$ 对时间的导数, 都有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(e_1, \tilde{\theta}) &= -k_1 e_1^2 + e_1 e_2 + e_1 \tilde{\theta} \varphi(e_1) + \frac{1}{b} \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} \\ &= -k_1 e_1^2 + e_1 e_2 + \tilde{\theta} \left(e_1 \varphi(e_1) + \frac{1}{b} \dot{\tilde{\theta}} \right) \end{aligned} \quad (5.425)$$

其中, 与没有未知参数的情况相比,

$$\tilde{\theta} \left(e_1 \varphi(e_1) + \frac{1}{b} \dot{\tilde{\theta}} \right) \quad (5.426)$$

是新增的与参数估计误差有关的项。选取参数调节律

$$\dot{\tilde{\theta}} = -b \varphi(e_1) e_1 \quad (5.427)$$

由于 $\dot{\hat{\theta}} = \dot{\tilde{\theta}} - \dot{\theta} = \dot{\tilde{\theta}}$, 因此

$$\dot{\hat{\theta}} = -b \varphi(e_1) e_1 \quad (5.428)$$

将式(5.428)代入式(5.425), 可得

$$\dot{V}_1(e_1, \tilde{\theta}) = -k_1 e_1^2 + e_1 e_2 \quad (5.429)$$

下一步, 对新的误差变量 e_2 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= u - \frac{\partial \phi(e_1, \hat{\theta})}{\partial e_1} \dot{e}_1 - \frac{\partial \phi(e_1, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \\ &= u - \frac{\partial \phi(e_1, \hat{\theta})}{\partial e_1} (-k_1 e_1 + e_2 - \tilde{\theta} \varphi(e_1)) + \frac{\partial \phi(e_1, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} b \varphi(e_1) e_1 \\ &= u - \frac{\partial \phi(e_1, \hat{\theta})}{\partial e_1} (-k_1 e_1 + e_2) + \frac{\partial \phi(e_1, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} b \varphi(e_1) e_1 \\ &\quad - \tilde{\theta} \varphi(e_1) \frac{\partial \phi(e_1, \hat{\theta})}{\partial e_1} \end{aligned} \quad (5.430)$$

其中, 参数估计误差 $\tilde{\theta}$ 是未知的。

设计控制器

$$u = -k_2 e_2 - e_1 + \frac{\partial \phi(e_1, \hat{\theta})}{\partial e_1} (-k_1 e_1 + e_2) - \frac{\partial \phi(e_1, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} b \varphi(e_1) e_1 + \hat{\theta} \varphi(e_1) \frac{\partial \phi(e_1, \hat{\theta})}{\partial e_1} \quad (5.431)$$

其中, k_2 是一个正的常数, $\hat{\theta}$ 是对未知的参数估计误差 $\tilde{\theta}$ 的估计值。那么, 可以将 e_2 -子系统写成

$$\dot{e}_2 = -k_2 e_2 - e_1 + \tilde{\theta} \varphi(e_1) \frac{\partial \phi(e_1, \hat{\theta})}{\partial e_1} \quad (5.432)$$

其中,

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \tilde{\theta} \quad (5.433)$$

是对 $\tilde{\theta}$ 的估计误差。

定义候选李雅普诺夫函数

$$V(e_1, e_2, \tilde{\theta}, \hat{\theta}) = V_1(e_1, \tilde{\theta}) + \frac{1}{2} e_2^2 + \frac{1}{2c} \tilde{\theta}^2 \quad (5.434)$$

其中, c 是一个正的常数。

沿着 e_1 -子系统(5.422)和 e_2 -子系统(5.432)的任意轨迹求 $V(e_1, e_2, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$ 对时间的导数, 都有

$$\dot{V}(e_1, e_2, \tilde{\theta}, \hat{\theta}) = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 + \tilde{\theta} \left(\varphi(e_1) \frac{\partial \phi(e_1, \hat{\theta})}{\partial e_1} e_2 + \frac{1}{c} \dot{\tilde{\theta}} \right) \quad (5.435)$$

为 $\hat{\theta}$ 设计如下参数调节律:

$$\dot{\hat{\theta}} = \dot{\tilde{\theta}} = -c \varphi(e_1) \frac{\partial \phi(e_1, \hat{\theta})}{\partial e_1} e_2 \quad (5.436)$$

能够保证

$$\dot{V}(e_1, e_2, \tilde{\theta}, \hat{\theta}) = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 \quad (5.437)$$

利用李雅普诺夫稳定定理(定理 2.1)能够证明上述以 $(e_1, e_2, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$ 作为状态变量的闭环系统在原点处稳定, 但尚不能证明渐近稳定。进一步利用不变集原理(定理 2.10)能够证明状态 (e_1, e_2) 趋近于零。

也可以将上面设计的闭环系统写成如下紧凑形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\varphi(e_1) & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi(e_1, \hat{\theta})}{\partial e_1} \varphi(e_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \quad (5.438)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}} \\ \ddot{\hat{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\varphi(e_1) & 0 \\ 0 & -c\frac{\partial\phi(e_1, \hat{\theta})}{\partial e_1}\varphi(e_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (5.439)$$

其与典型的自适应控制系统形式相同（见例 2.40）。

需要注意的是，本例设计的自适应控制器是由包含参数估计变量的控制器(5.431)和参数估计变量的动态更新律（见式(5.427)和式(5.436)）共同构成的，是一个动态控制器，所引入的参数估计变量本身也是闭环系统状态变量的一部分。

5.3.2 基于反步法的控制器设计

如果被控对象动力学是充分光滑的，而设计的虚拟控制器也是充分光滑的，那么完全可以将 5.3.1 节中针对二阶被控对象的反步法推广到更高阶的情形。

在 5.3.1 节的基础上，本节将反步法由迭代一次推广到迭代多次，从而更好地解决高阶非线性被控对象的控制问题。具体考虑如下形式的被控对象：

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \quad (5.440)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \quad (5.441)$$

⋮

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)u \quad (5.442)$$

其中， $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 是状态， $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入。这种被控对象模型被称作严格反馈型。假设函数 f_i 和 g_i 都是充分光滑的，且 $f_i(0, 0, \dots, 0) = 0$ 。期望设计状态反馈控制器使闭环系统状态 \boldsymbol{x} 保持有界且趋近于原点。

假设 5.4 对于 $i = 1, 2, \dots, n$ ，存在正的常数 \underline{g}_i ，使得

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_i) \geq \underline{g}_i, \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_i \quad (5.443)$$

下面介绍利用反步法迭代构造控制器的基本过程。

1. 初始步

既然期望状态分量 x_1 趋近于原点，定义误差变量

$$e_1 = x_1 \quad (5.444)$$

对误差变量 e_1 求导并利用式(5.440)，可得

$$\dot{e}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \quad (5.445)$$

将 x_2 看作 e_1 -子系统的虚拟控制输入。考虑理想控制器

$$\phi_1(x_1) = \frac{1}{g_1(x_1)}(-f_1(x_1) - k_1x_1) \quad (5.446)$$

其中, k_1 是一个正的常数。不难验证, $\dot{e}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)\phi_1(x_1) = -k_1 e_1$ 在原点处全局渐近稳定。

定义虚拟控制量 x_2 和理想控制量 $\phi_1(x_1)$ 之间的误差变量:

$$e_2 = x_2 - \phi_1(x_1) \quad (5.447)$$

那么,

$$x_2 = \phi_1(x_1) + e_2 \quad (5.448)$$

并且可以将 e_1 -子系统(5.445)重新写成

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)\phi_1(x_1) + g_1(x_1)e_2 \\ &= -k_1 e_1 + g_1(x_1)e_2 \end{aligned} \quad (5.449)$$

定义

$$V_1(e_1) = \frac{1}{2}e_1^2 \quad (5.450)$$

那么, 沿系统(5.449)的任意轨迹, 都有

$$\dot{V}_1(e_1) = -k_1 e_1^2 + g_1(x_1)e_1 e_2 \quad (5.451)$$

2. 迭代步

对于某个 j ($1 \leq j \leq n-1$), 假设对 $i = 1, 2, \dots, j$ 存在光滑的 $\phi_i: \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\phi_i(0) = 0$, 使得

- 递归定义的

$$e_i = x_i - \phi_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, j+1 \quad (5.452)$$

满足

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_i) + g_i(x_1, x_2, \dots, x_i)x_{i+1} \\ &\quad + \frac{\partial \phi_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_{i-1})}(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{i-1}) \\ &=: f'_i(x_1, x_2, \dots, x_i) \\ &\quad + g_i(x_1, x_2, \dots, x_i)(\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_i) + e_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, j \end{aligned} \quad (5.453)$$

- 沿系统(5.453)的任意轨迹求

$$V_j(e_1, e_2, \dots, e_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j e_i^2 \quad (5.454)$$

对时间的导数, 都有

$$\dot{V}_j(e_1, e_2, \dots, e_j) = - \sum_{i=1}^j k_i e_i^2 + g_j(x_1, x_2, \dots, x_j)e_j e_{j+1} \quad (5.455)$$

如果上述假设成立, 那么对 e_{j+1} 求导可得

$$\begin{aligned}\dot{e}_{j+1} &= f_{j+1}(x_1, x_2, \dots, x_{j+1}) + g_{j+1}(x_1, x_2, \dots, x_{j+1})x_{j+2} \\ &\quad + \frac{\partial \phi_j(x_1, x_2, \dots, x_j)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_j)}(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_j) \\ &=: f'_{j+1}(x_1, x_2, \dots, x_{j+1}) + g_{j+1}(x_1, x_2, \dots, x_{j+1})x_{j+2}\end{aligned}\quad (5.456)$$

进一步定义

$$V_{j+1}(e_1, e_2, \dots, e_{j+1}) = V_j(e_1, e_2, \dots, e_j) + \frac{1}{2}e_{j+1}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j+1} e_i^2 \quad (5.457)$$

沿着由式(5.453)和式(5.456)构成的误差系统的任意轨迹求 $V_{j+1}(e_1, e_2, \dots, e_{j+1})$ 对时间的导数, 都有

$$\begin{aligned}\dot{V}_{j+1}(e_1, e_2, \dots, e_{j+1}) &= \dot{V}_j(e_1, e_2, \dots, e_j) + e_{j+1}\dot{e}_{j+1} \\ &= -\sum_{i=1}^j k_i e_i^2 + e_{j+1}(g'_j(\cdot)e_j + f'_{j+1}(\cdot) + g'_{j+1}(\cdot)x_{j+2})\end{aligned}\quad (5.458)$$

将 x_{j+2} 看作 e_j -子系统的虚拟控制输入。考虑相应的理想控制器

$$\phi_{j+1}(x_1, x_2, \dots, x_{j+1}) = \frac{1}{g_{j+1}(\cdot)}(-g_j(\cdot)e_j - f'_{j+1}(\cdot) - k_{j+1}e_{j+1}) \quad (5.459)$$

并定义虚拟控制输入 x_{j+2} 相对理想控制量 $\phi_{j+1}(\bar{x}_{j+1})$ 的误差变量:

$$e_{j+2} = x_{j+2} - \phi_{j+1}(x_1, x_2, \dots, x_{j+1}) \quad (5.460)$$

将理想控制器(5.459)和新的误差变量(见式(5.460))代入式(5.458), 可得

$$\dot{V}_{j+1}(e_1, e_2, \dots, e_{j+1}) = -\sum_{i=1}^{j+1} k_i e_i^2 + g'_{j+1}(x_1, x_2, \dots, x_{j+1})e_{j+1}e_{j+2} \quad (5.461)$$

3. 完成控制器设计

当 $j+1 = n$ 时, 直接取

$$u = \frac{1}{g_n(\cdot)}(-g_{n-1}(\cdot)e_{n-1} - f'_n(\cdot) - k_n e_n) \quad (5.462)$$

其中, k_n 是一个正的常数。

定义

$$V_n(e_1, e_2, \dots, e_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n e_i^2 \quad (5.463)$$

沿着由式(5.453)和式(5.456)组成的误差系统的任意轨迹求 $V_n(e_1, e_2, \dots, e_n)$ 对时间的导数, 都有

$$\dot{V}_n(e_1, e_2, \dots, e_n) = -\sum_{i=1}^n k_i e_i^2 \quad (5.464)$$

因此, 以 (e_1, e_2, \dots, e_n) 为状态的误差系统在原点处全局渐近稳定。在此基础上, 利用 e_i 的定义(5.452)能够保证被控对象状态轨迹 $\boldsymbol{x}(t)$ 的有界性和收敛性。

定理 5.9 (严格反馈型非线性被控对象的反步法控制器设计) 在满足假设 5.4 的前提下, 考虑由式(5.440)~式(5.442)描述的被控对象及控制器(5.462)构成的闭环系统。对于任意初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$, 系统状态轨迹 $\boldsymbol{x}(t)$ 有界且趋近于原点。

对于上面所考虑的被控对象, 也可以将以上反步法设计过程看作一个迭代的坐标变换过程:

$$e_1 = x_2 \quad (5.465)$$

$$e_i = x_i - \phi_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (5.466)$$

如果用于定义理想控制器的函数 ϕ_{i-1} 具有(5.459)的形式, 那么就可以把以 (e_1, e_2, \dots, e_n) 作为状态的闭环系统写成如下紧凑形式:

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + g_1(\cdot) e_2 \quad (5.467)$$

$$\dot{e}_i = -k_i e_i - g_{i-1}(\cdot) e_{i-1} + g_i(\cdot) e_{i+1}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (5.468)$$

$$\dot{e}_n = -k_n e_n + g_{n-1}(\cdot) e_{n-1} \quad (5.469)$$

沿着该闭环系统的任意轨迹, 由式(5.463)定义的 $V(e_1, e_2, \dots, e_n)$ 都满足式(5.464), 是一个李雅普诺夫函数, 并保证该闭环系统在原点处全局渐近稳定。

5.3.3 基于非线性小增益定理的控制

5.3.2 节介绍的反步法从被控对象的输出开始, 迭代地定义新的误差变量并将更高阶次的状态分量看作虚拟控制输入, 直至真正的控制输入出现。通过这一设计过程, 最终能够得到一个以误差变量为状态的关联系统, 而通过构造(组合型)李雅普诺夫函数能够保证该关联系统在期望的平衡点(原点)处渐近稳定。基于这一思想, 完全可以将其他针对性的关联系统工具(比如无源定理、非线性小增益定理等)引入到反步法控制器设计中, 从而更加灵活地解决控制问题。

考虑如下形式的被控对象:

$$\dot{x}_i = f_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) + x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.470)$$

$$\dot{x}_n = f_n(\bar{\boldsymbol{x}}_n) + u \quad (5.471)$$

其中, $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $\bar{\boldsymbol{x}}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T$, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, $f_i: \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$ 是局部李普希茨的函数。对于 $i = 1, 2, \dots, n$, 假设存在局部李普希茨的 $\psi_{f_i} \in \mathcal{K}_\infty$, 使得

$$|f_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)| \leq \psi_{f_i}(|\bar{\boldsymbol{x}}_i|) \quad (5.472)$$

对所有的 $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^i$ 都成立。

基于非线性小增益定理的控制器设计过程通过迭代的方式把原被控对象的状态 (x_1, x_2, \dots, x_n) 变换为新的状态 (e_1, e_2, \dots, e_n) ，对应于每个新的状态分量 e_i 的子系统相互关联，并且每个 e_i -子系统都是输入到状态稳定的。具体而言，考虑如下坐标变换：

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - \kappa_1(e_1) \\ \vdots \\ x_n - \kappa_{n-1}(e_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (5.473)$$

和控制器

$$u = \kappa_n(e_n) \quad (5.474)$$

其中， $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是适当选取的函数。

为每个 e_i -子系统定义候选的输入到状态稳定李雅普诺夫函数：

$$V_{e_i}(e_i) = \alpha_V(|e_i|) \quad (5.475)$$

其中， $\alpha_V(s) = s^2/2$ 。为便于后续讨论，记 $\bar{e}_i = [e_1, e_2, \dots, e_i]^T$ ， $e_{n+1} = x_{n+1} - \kappa_n(e_n) = u - \kappa_n(e_n) = 0$ 。

如下设计过程通过依次选取函数 κ_i 使得每个 e_i -子系统都是输入到状态稳定的，并且 V_{e_i} 是相应的输入到状态稳定李雅普诺夫函数。不仅如此，通过使各个子系统之间的关联增益满足小增益条件，保证最终得出的闭环系统（以 (e_1, e_2, \dots, e_n) 作为状态）在原点处全局渐近稳定。

第一步： e_1 -子系统

根据状态变换(5.473)，对 e_1 求导可得

$$\dot{e}_1 = f_1^*(\bar{e}_2) + \kappa_1(e_1) \quad (5.476)$$

其中， $f_1^*(\bar{e}_2) = e_2 + f_1(e_1)$ 。而由条件(5.472)可知，存在局部李普希茨的函数 $\psi_{f_1^*}^{e_1}, \psi_{f_1^*}^{e_2} \in \mathcal{K}_\infty$ ，使得 $|f_1^*(\bar{e}_2)| \leq \psi_{f_1^*}^{e_1}(|e_1|) + \psi_{f_1^*}^{e_2}(|e_2|)$ 。在此基础上，对 e_1 -子系统进行增益配置（见例 4.9）：给定常数 $\ell_{e_1} > 0$ 和函数 $\gamma_{e_1}^{e_2} \in \mathcal{K}_\infty$ （要求 $(\gamma_{e_1}^{e_2})^{-1}$ 是局部李普希茨的），存在一个连续可导、严格递减且径向无界的奇函数 $\kappa_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得

$$V_{e_1}(e_1) \geq \gamma_{e_1}^{e_2}(V_{e_2}(e_2)) \Rightarrow \nabla V_{e_1}(e_1)(f_1^*(\bar{e}_2) + \kappa_1(e_1)) \leq -\ell_{e_1} V_{e_1}(e_1) \quad (5.477)$$

迭代步： e_i -子系统 ($i = 2, 3, \dots, n$)

假设已经将原被控对象的状态 $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$ 变换为 $\bar{e}_{i-1} = (e_1, e_2, \dots, e_{i-1})$ ，并

且其具有如下形式:

$$\dot{e}_1 = f_1^*(\bar{e}_2) + \kappa_1(e_1) \quad (5.478)$$

⋮

$$\dot{e}_{i-1} = f_{i-1}^*(\bar{e}_i) + \kappa_{i-1}(e_{i-1}) \quad (5.479)$$

其中, $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{i-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续可导、严格递减且径向无界的奇函数。将上述 \bar{e}_{i-1} -子系统记作

$$\dot{\bar{e}}_{i-1} = \mathbf{F}_{i-1}(\bar{e}_i) \quad (5.480)$$

假设 \bar{e}_{i-1} -子系统是输入到状态稳定的 (以 e_i 作为输入), 并具有输入到状态稳定李雅普诺夫函数 $V_{\bar{e}_{i-1}}$, 其几乎处处可导, 满足

$$\underline{\alpha}_{\bar{e}_{i-1}}(|\bar{e}_{i-1}|) \leq V_{\bar{e}_{i-1}}(\bar{e}_{i-1}) \leq \bar{\alpha}_{\bar{e}_{i-1}}(|\bar{e}_{i-1}|) \quad (5.481)$$

且只要 $\nabla V_{\bar{e}_{i-1}}$ 有定义就有

$$\begin{aligned} V_{\bar{e}_{i-1}}(\bar{e}_{i-1}) &\geq \gamma_{\bar{e}_{i-1}}^{e_i}(V_{e_i}(e_i)) \\ \Rightarrow \nabla V_{\bar{e}_{i-1}}(\bar{e}_{i-1})F_{i-1}(\bar{e}_i) &\leq -\alpha_{\bar{e}_{i-1}}(V_{\bar{e}_{i-1}}(\bar{e}_{i-1})) \end{aligned} \quad (5.482)$$

其中, $\underline{\alpha}_{\bar{e}_{i-1}}, \bar{\alpha}_{\bar{e}_{i-1}}, \gamma_{\bar{e}_{i-1}}^{e_i} \in \mathcal{K}_\infty$ (要求 $(\gamma_{\bar{e}_{i-1}}^{e_i})^{-1}$ 是局部李普希茨的), $\alpha_{\bar{e}_{i-1}} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是连续且正定的函数。

在此基础上, 对 e_i 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \dot{x}_i - \frac{\partial \kappa_{i-1}(e_{i-1})}{\partial e_{i-1}} \dot{e}_{i-1} \\ &= x_{i+1} + f_i(\bar{x}_i) - \frac{\partial \kappa_{i-1}(e_{i-1})}{\partial e_{i-1}} (\kappa_{i-1}(e_{i-1}) + f_{i-1}^*(\bar{e}_i)) \end{aligned} \quad (5.483)$$

由状态变换(5.473)可知, $e_{i+1} = x_{i+1} - \kappa_i(e_i)$ 并且可以使用 \bar{e}_i 来表示 \bar{x}_i 。这样, 就可以将 e_i -子系统重新写成

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= f_i(\bar{x}_i) - \frac{\partial \kappa_{i-1}(e_{i-1})}{\partial e_{i-1}} (\kappa_{i-1}(e_{i-1}) + f_{i-1}^*(\bar{e}_i)) + e_{i+1} + \kappa_i(e_i) \\ &=: f_i^*(\bar{e}_{i+1}) + \kappa_i(e_i) \end{aligned} \quad (5.484)$$

并且可以证明, 存在局部李普希茨的函数 $\psi_{f_i^*}^{\bar{e}_{i-1}}, \psi_{f_i^*}^{e_i}, \psi_{f_i^*}^{e_{i+1}} \in \mathcal{K}_\infty$, 使得

$$|f_i^*(\bar{e}_{i+1})| \leq \psi_{f_i^*}^{\bar{e}_{i-1}}(|\bar{e}_{i-1}|) + \psi_{f_i^*}^{e_i}(|e_i|) + \psi_{f_i^*}^{e_{i+1}}(|e_{i+1}|) \quad (5.485)$$

对 e_i -子系统(5.484)进行增益配置。给定常数 $\ell_{e_i} > 0$ 、函数 $\gamma_{\bar{e}_{i+1}}^{e_i}, \gamma_{e_{i+1}}^{e_i} \in \mathcal{K}_\infty$ (要求它们的逆函数均是局部李普希茨的), 存在一个连续可导、严格递减且径向无界的奇函数 $\kappa_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 使得

$$\begin{aligned}
 V_{e_i}(e_i) &\geq \max\{\gamma_{e_i}^{\bar{e}_{i-1}}(V_{\bar{e}_{i-1}}(\bar{e}_{i-1})), \gamma_{e_i}^{e_{i+1}}(V_{e_{i+1}}(e_{i+1}))\} \\
 &\Rightarrow \nabla V_{e_i}(e_i)(\kappa_i(e_i) + f_i^*(\bar{e}_{i+1})) \leq -\ell_{e_i} V_{e_i}(e_i)
 \end{aligned} \tag{5.486}$$

将 $\dot{\bar{e}}_i$ -子系统看作由 \bar{e}_{i-1} -子系统和 e_i -子系统关联而成的，如图 5-23 所示。

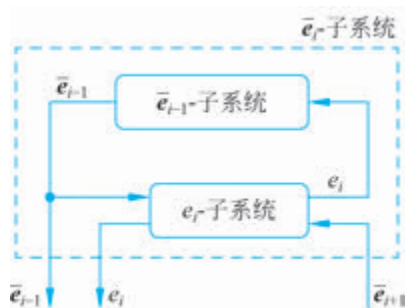


图 5-23 基于非线性小增益定理的控制器迭代设计

为统一符号，记 $\dot{\bar{e}}_i = F_i(\bar{e}_{i+1})$ 。由基于李雅普诺夫的非线性小增益定理（定理 4.5）可知，如果选取 $\gamma_{e_i}^{\bar{e}_{i-1}}$ 使得小增益条件

$$\gamma_{e_i}^{\bar{e}_{i-1}} \circ \gamma_{\bar{e}_{i-1}}^{e_i} < \text{Id} \tag{5.487}$$

成立，那么就能保证 \bar{e}_i -子系统是输入到状态稳定的。并且在小增益条件(5.487)成立的前提下，可以为 \bar{e}_i -子系统构造如下输入到状态稳定李雅普诺夫函数：

$$V_{\bar{e}_i}(\bar{e}_i) = \max\{\sigma_{\bar{e}_{i-1}}(V_{\bar{e}_{i-1}}(\bar{e}_{i-1})), V_{e_i}(e_i)\} \tag{5.488}$$

其中， $\sigma_{\bar{e}_{i-1}} \in \mathcal{K}_\infty$ 在 $(0, \infty)$ 上连续可导并满足 $\sigma_{\bar{e}_{i-1}} > \gamma_{\bar{e}_{i-1}}^{e_i}$ ， $\sigma_{\bar{e}_{i-1}} \circ \gamma_{\bar{e}_{i-1}}^{e_i} < \text{Id}$ 。对于该输入到状态稳定李雅普诺夫函数，存在 $\underline{\alpha}_{\bar{e}_i}, \bar{\alpha}_{\bar{e}_i}, \gamma_{\bar{e}_i}^{e_{i+1}} \in \mathcal{K}_\infty$ （此外，要求 $(\gamma_{\bar{e}_i}^{e_{i+1}})^{-1}$ 是局部李普希茨的）和连续且正定的函数 $\alpha_{\bar{e}_i} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ，使得

$$\alpha_{\bar{e}_i}(|\bar{e}_i|) \leq V_{\bar{e}_i}(\bar{e}_i) \leq \bar{\alpha}_{\bar{e}_i}(|\bar{e}_i|) \tag{5.489}$$

且只要 $\nabla V_{\bar{e}_i}$ 有定义就有

$$\begin{aligned}
 V_{\bar{e}_i}(\bar{e}_i) &\geq \gamma_{\bar{e}_i}^{e_{i+1}}(V_{e_{i+1}}(e_{i+1})) \\
 &\Rightarrow \nabla V_{\bar{e}_i}(\bar{e}_i)F_i(\bar{e}_{i+1}) \leq -\alpha_{\bar{e}_i}(V_{\bar{e}_i}(\bar{e}_i))
 \end{aligned} \tag{5.490}$$

当 $i = n$ 时， $x_{i+1} = x_{n+1} = u$ ，且 $e_{n+1} = 0$ 。同样可以为 \bar{e}_n -系统（也就是 e -系统）构造满足如式(5.489)和式(5.490)所示条件的李雅普诺夫函数 $V_{\bar{e}_n}$ （相应的 $i = n$ ， $e_{i+1} = 0$ ），并能够验证以 e 作为状态的闭环系统在原点处全局渐近稳定。

如下通过一个简化的串级反应装置的例子介绍如何将反步法与非线性小增益定理相结合来设计串级控制器实现镇定。

例 5.26 (基于非线性小增益定理的两级串联反应器的控制器设计) 考虑由两个串联反应器组成的被控对象, 其相对于设定值稳态的误差系统由如下模型描述:

$$\dot{x}_1 = -\left(k_1 + \frac{2}{D_1} - D_3\right)x_1 + \frac{1 - R_2}{E_1}x_2 \quad (5.491)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{R_1}{E_2}x_1 + \left(-k_2 - \frac{1}{D_2} + \frac{R_2}{E_2}\right)x_2 + \left(\frac{D_4}{2} - \frac{1}{D_2}\right)x_2^2 + \frac{F}{E_2}u \quad (5.492)$$

其中, 对于 $i = 1, 2$, x_i 分别表示两个反应器中的成分, 参数 $R_i > 0$ 表示循环流量, 参数 $D_i > 0$ 表示反应器留存时间, 参数 $k_i > 0$ 表示反应常数, 参数 $F > 0$ 表示进料速率, 参数 $E_i > 0$ 表示反应器容积, $u \in \mathbb{R}$ 表示反应器的进料成分。以 u 作为控制输入, 期望设计状态反馈控制器使得以 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T$ 为状态的闭环系统在原点处全局渐近稳定。在下面的控制器设计中, 考虑参数 $R_i = E_i = F = k_i = 0.5$, $D_1 = D_2 = 2$, $D_3 = D_4 = 0.4$ 。

显然, 由式(5.491)和式(5.492)描述的被控对象属于严格反馈型。因此, 考虑设计如下形式的串级控制器:

$$u = \rho_2(x_2 - \rho_1(x_1)) \quad (5.493)$$

其中, $\rho_1, \rho_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是非线性函数, 相应的控制系统框图如图 5-24 所示。

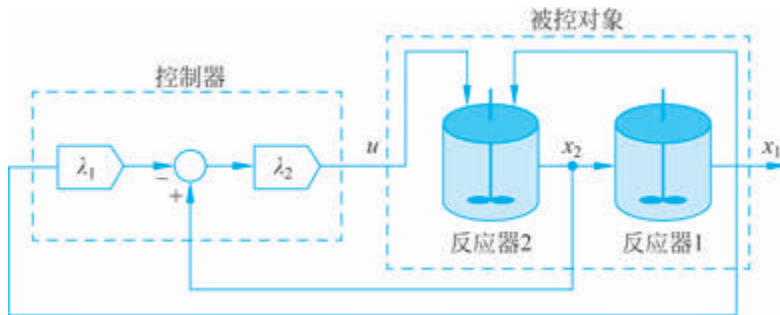


图 5-24 两级串联反应器的控制系统框图

为了选取控制器中的函数 ρ_1 和 ρ_2 使闭环系统能够达到期望的控制目标, 定义误差变量

$$e_1 = x_1 \quad (5.494)$$

$$e_2 = x_2 - \rho_1(x_1) \quad (5.495)$$

考虑被控对象动力学方程(5.491)~方程(5.495)以及控制器(5.493), 可得闭环误差系统:

$$\dot{e}_1 = \rho_1(e_1) - 1.1e_1 + e_2 \quad (5.496)$$

$$\dot{e}_2 = \rho_2(e_2) + e_1 - \frac{\partial \rho_1(e_1)}{\partial e_1} \dot{e}_1 - 0.3(\rho_1(e_1) + e_2)^2 \quad (5.497)$$

为上述每个 e_i -子系统 ($i = 1, 2$) 进行增益配置 (见例 4.9), 取

$$\rho_1(r) = -1.78r \quad (5.498)$$

$$\rho_2(r) = -2.48|r|r - 4.28r \quad (5.499)$$

其中, $r \in \mathbb{R}$, 其能够保证每个 e_i -子系统均是输入到状态稳定的, 并且具有输入到状态稳定李雅普诺夫函数 $V_i(e_i) = e_i^2/2$, 满足

$$V_1(e_1) \geq 0.9V_2(e_2) \Rightarrow \nabla V_1(e_1)\dot{e}_1 \leq -0.2V_1(e_1) \quad (5.500)$$

$$V_2(e_2) \geq 0.9V_1(e_1) \Rightarrow \nabla V_2(e_2)\dot{e}_2 \leq -0.2V_2(e_2) \quad (5.501)$$

显然, 两个子系统之间的关联增益满足小增益条件 (见基于李雅普诺夫的非线性小增益定理, 即定理 4.5)。因此, 上述以误差变量 $e = [e_1, e_2]^T$ 作为状态变量的由式(5.496)和式(5.497)描述的闭环误差系统在原点处全局渐近稳定。也就是说, 存在 $\beta_e \in \mathcal{KL}$, 使得对于任意初始的误差状态 $e(0)$, 都有

$$|e(t)| \leq \beta_e(|e(0)|, t), \quad \forall t \geq 0 \quad (5.502)$$

而进一步考虑由式(5.494)和式(5.495)定义的坐标变换, 又存在 $\beta_x \in \mathcal{KL}$ 使得对于任意初始的误差状态 $x(0)$, 都有

$$|x(t)| \leq \beta_x(|x(0)|, t), \quad \forall t \geq 0 \quad (5.503)$$

具体而言, 可以取 $\beta_x(s, t) = 2.78\beta_e(2.78s, t)$ 。这样就保证了以 x 作为状态的闭环系统在原点处全局渐近稳定。串联连接的不同反应器之间往往存在未知大小的时延, 本例未考虑, 但基于非线性小增益定理的控制方法能够有效处理^[272]。图 5-25 所示为闭环系统状态 (x_1, x_2) 和控制输入 u 的变化曲线 ($x_1(0) = 1.9, x_2(0) = 0.5$)。

例 5.27 (机械臂安全控制) 考虑机械臂安全控制问题, 将 1.3.3 节中的两关节机械臂模型重写如下:

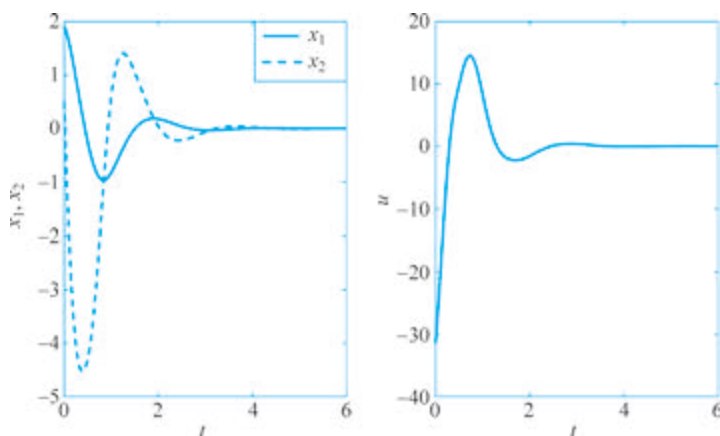


图 5-25 受控的两级串联反应器的状态曲线和控制输入曲线

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (5.504)$$

其中相关符号定义与 1.3.3 节相同。安全控制要求机械臂上的每一个点都与障碍物保持一定的距离，并且在工作过程中尽可能地遵从速度指令信号 \mathbf{v}_c 。具体而言，将安全约束描述为

$$h(\mathbf{q}(t)) = |\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_o| - d_s \geq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.505)$$

其中， $\mathbf{q}_o \in \mathbb{R}^2$ 表示障碍物的位置， $d_s > 0$ 表示安全裕度。同时，不失一般性，假设速度指令信号 $\mathbf{v}_c(t)$ 有界且连续可导，即存在正的常数 \bar{v}_c 和 \bar{v}_c^d ，使得对所有的 $t \geq 0$ 都有

$$|\mathbf{v}_c(t)| \leq \bar{v}_c \quad (5.506)$$

$$|\dot{\mathbf{v}}_c(t)| \leq \bar{v}_c^d \quad (5.507)$$

考虑借助反步法的思想，通过串级控制的方式来解决该安全控制问题。

具体而言，首先考虑机械臂的运动学部分，以角速度作为角度环的虚拟控制量，设计安全控制律使得受控的机械臂转角 \mathbf{q} 能够满足安全约束并且角速度 $\dot{\mathbf{q}}$ 尽量接近 \mathbf{v}_c 。为此，考虑使用二次规划来集成安全约束与角速度指令：

$$\mathbf{v}^* = \underset{\mathbf{v}^*}{\operatorname{argmin}} |\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_c| \quad (5.508)$$

$$\text{s. t. } \frac{(\mathbf{q}_o - \mathbf{q})^T}{|\mathbf{q}_o - \mathbf{q}|} \mathbf{v}^* \leq \alpha_p(|\mathbf{q}_o - \mathbf{q}| - d_s) - d_r \quad (5.509)$$

其中 $\alpha_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是严格递增的函数，满足 $\alpha_p(0) = 0$ 以及 $|\alpha_p(r)| \leq \bar{\alpha}_p < \infty$ 对所有的 $r \in \mathbb{R}$ 成立，常数 $d_r > 0$ 使角度安全控制能够具备对角速度跟踪误差有充分大的裕度。根据凸优化理论^[120]，任意给定的 $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_o$ 和 \mathbf{v}_c ，由式(5.508)和式(5.509)定义的二次规划算法生成唯一的 \mathbf{v}^* 。因此，可以使用函数 $\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 表示安全控制律，即

$$\mathbf{v}^* = \varphi(\mathbf{q}, \mathbf{v}_c) \quad (5.510)$$

不仅如此，能够证明 φ 是局部李普希茨的，而为了衡量上述安全控制律实现期望的安全控制的能力，定义

$$W_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}_c) = -h(\mathbf{q}) \quad (5.511)$$

不难论证，在速度跟踪误差的上界小于 d_r 时，以下条件可以被满足

$$\boldsymbol{\delta}^T [\dot{\mathbf{q}}; \ddot{\mathbf{q}}; \dot{\mathbf{v}}_c] \leq -\alpha_{w1}(W_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}_c)) \quad \boldsymbol{\delta} \in \partial W_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}_c) \quad (5.512)$$

其中 $\alpha_{w1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是严格递增的函数，满足 $\alpha_{w1}(0) = 0$ 。此处，符号 $\boldsymbol{\delta}$ 表示广义梯度，其包含所有可能的梯度，从而将常规的梯度概念推广到未必可导的函数。

在安全控制的基础上，考虑机械臂的动力学部分的 $\boldsymbol{\tau}$ 作为控制输入设计的速度跟踪

控制律, 使 \dot{q} 跟踪安全控制律生成的理想角速度 v^* 。为此, 考虑

$$\tau = g(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})v^* - k_D(\dot{q} - v^*) \quad (5.513)$$

其中, k_D 是正的常数。为了衡量控制律实现角速度跟踪的能力, 定义

$$W_2(q, \dot{q}, v_c) = -\frac{nL\mu_{m1}\mu_{m2}^2(v_c^d + \bar{\alpha}_p - d_r)d_r}{\mu_{m1}k_D - 2nL\mu_{m2}^2} + \frac{1}{2}(\dot{q} - \varphi(q, v_c))^T M(q)(\dot{q} - \varphi(q, v_c)) \quad (5.514)$$

不难验证, 如果

$$W_2(q, \dot{q}, v_c) \leq \frac{\mu_{m1}^2}{2\mu_{m2}} d_r^2 - \frac{nL\mu_{m1}\mu_{m2}^2(v_c^d + \bar{\alpha}_p - d_r)d_r}{\mu_{m1}k_D - 2nL\mu_{m2}^2} \quad (5.515)$$

那么,

$$\delta^T[\dot{q}; \ddot{q}; \dot{v}_c] \leq -\alpha_{w2}(W_1(q, \dot{q}, v_c)) \quad \delta \in \partial W_2(q, \dot{q}, v_c) \quad (5.516)$$

其中, $\alpha_{w2}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是严格递增的函数, 满足 $\alpha_{w2}(0) = 0$ 。

通过以上设计形成了由外环安全控制律(见式(5.508)和式(5.509))和内环跟踪控制律(5.513)构成的串级控制器。对于由该控制器和被控对象(5.504)构成的闭环系统, 定义

$$W(q, \dot{q}, v_c) = \max\{W_1(q, \dot{q}, v_c), W_2(q, \dot{q}, v_c)\} \quad (5.517)$$

不难验证, 若 $k_D > 2nL\mu_{m2}^3(v_c^d + \bar{\alpha}_p + d_r)/\mu_{m1}^2 d_r$, 则存在常数 $d_w > 0$, 使得当 $W(q, \dot{q}, v_c) \leq d_w$ 时,

$$\delta^T[\dot{q}; \ddot{q}; \dot{v}_c] \leq -\alpha_w(W(q, \dot{q}, v_c)), \quad \forall \delta \in \partial W(q, \dot{q}, v_c) \quad (5.518)$$

其中, $\alpha_w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是严格递增的函数, 满足 $\alpha_w(0) = 0$ 。

进而可以得出对于几乎所有满足 $W(q(t), \dot{q}(t), v_c(t)) \leq d_w$ 的 $t \geq 0$, 都有

$$\dot{W}(q(t), \dot{q}(t), v_c(t)) \leq -\alpha_w(W(q(t), \dot{q}(t), v_c(t))) \quad (5.519)$$

因此,

$$W((q(0), \dot{q}(0), v_c(0)) \leq 0 \Rightarrow W((q(t), \dot{q}(t), v_c(t)) \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.520)$$

从而保证实现安全控制目标(5.505)。图 5-26 所示为上述安全控制器的串级结构。

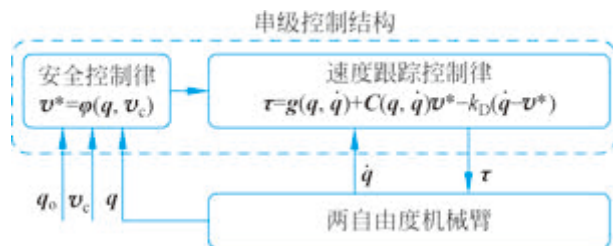


图 5-26 机械臂安全控制器的串级结构

下面通过一个仿真算例验证上述安全控制器。具体考虑如下参数：

$$d_s = 1.35\text{rad}, \quad d_r = 0.0175\text{rad}, \quad k_D = 50, \quad \alpha_p(r) = 5r, \quad r \in (-\infty, \infty) \quad (5.521)$$

图 5-27 所示为受控的机械臂在工作空间和关节空间的运行轨迹。

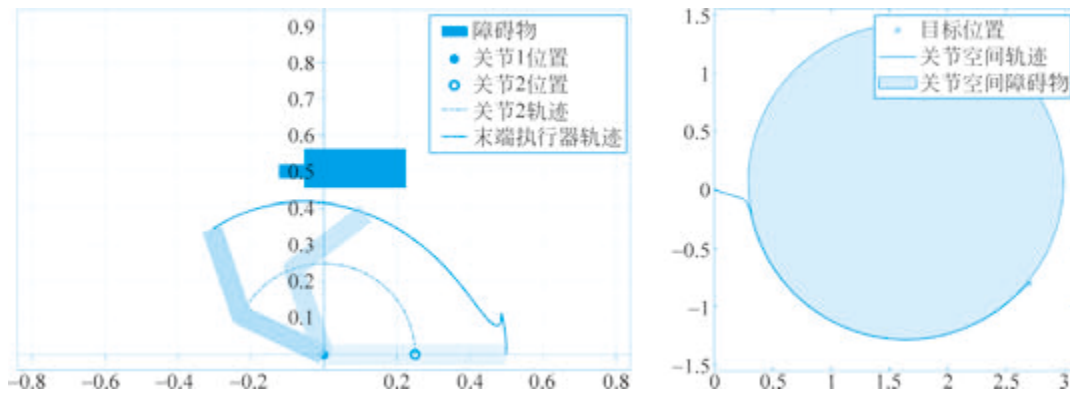


图 5-27 机械臂在工作空间和关节空间的轨迹

5.4 前推法

前面介绍的反步法主要适用于具有串联或下三角关联结构的被控对象。与这类被控对象结构相反，许多被控对象（如垂直起降飞机、小车倒立摆、球杆系统等）具有前馈或上三角关联结构。前推法能够充分利用被控对象中各个子系统之间的上三角关联特征及动力学特性，从最高阶（最后面）的状态开始往前逐个处理各个状态分量，最终保证闭环系统达到期望的控制目标。

5.4.1 基本思想

一种典型的前推法借助了高阶积分器的饱和控制结果，并将其推广到非线性被控对象。

例 5.28 (饱和控制与前推法) 考虑被控对象：

$$\dot{y}_1 = y_2 + y_2^2 + u \quad (5.522)$$

$$\dot{y}_2 = u \quad (5.523)$$

其中， $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态， $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入。此处，之所以使用 \mathbf{y} 而不是 \mathbf{x} 来表示状态，是为了避免与后面 5.4.2 节的讨论发生混淆。期望设计状态反馈控制器使闭环系统状态 \mathbf{y} 有界且趋近于零。

显然，该被控对象不满足全状态线性化的条件（见定理 5.4），因此难以使用反馈线性化的方法解决上述控制问题。同时，该被控对象也不具备 5.3 节研究的下三角结构，因

此也难以使用反步法实现上述控制目标。

注意到, 如果 y_1 -子系统的动力学中没有 y_2^2 这一项, 那么可以直接使用例 4.5 中关于由式(4.25)和式(4.26)描述的系统的全球渐近稳定性结果。也就是说, 利用控制器

$$u = -\sigma_2(y_2 + \sigma_1(y_1)) \quad (5.524)$$

能够使忽略 y_2^2 这一项的闭环系统

$$\dot{y}_1 = y_2 - \sigma_2(y_2 + \sigma_1(y_1)) \quad (5.525)$$

$$\dot{y}_2 = -\sigma_2(y_2 + \sigma_1(y_1)) \quad (5.526)$$

在 origin 处全局渐近稳定, 其中, σ_1 和 σ_2 都是如下形式的饱和函数:

$$\sigma_i(r) = M_i \operatorname{sat}\left(\frac{r}{M_i}\right) = \operatorname{sign}(r) \min\{|r|, M_i\}, \quad i = 1, 2 \quad (5.527)$$

其中, M_i 是正的常数。显然, M_i 是函数 σ_i 的饱和值, 而区间 $[-M_i, M_i]$ 是该函数的未饱和区域。

然而, 即使不忽略 y_2^2 这一项, 也能够使用类似例 4.5 的前推处理过程, 先分析 y_2 -子系统再分析 y_1 -子系统, 并重新选取饱和函数 σ_1 和 σ_2 , 最终使闭环系统在 origin 处全局渐近稳定。具体而言, 此时的闭环系统为

$$\dot{y}_1 = y_2 + y_2^2 - \sigma_2(y_2 + \sigma_1(y_1)) \quad (5.528)$$

$$\dot{y}_2 = -\sigma_2(y_2 + \sigma_1(y_1)) \quad (5.529)$$

首先分析 y_2 -子系统(5.529)。如果将 $\sigma_1(y_1)$ 看作有界干扰, 那么 y_2 -子系统与例 4.4 中的闭环系统(4.16)形式相同, 以 $\sigma_1(y_1)$ 作为输入是输入到状态稳定的。与性质(4.17)对应, 任意选定一个正的常数 ϵ (比如在 $M_2/M_1 > 2$ 的前提下, 选取 ϵ 满足 $0 < \epsilon \leq M_2/M_1 - 2$), 都存在 $\beta \in \mathcal{KL}$, 使得对于任意 $y_2(0)$ 和连续且有界的任意 $y_1(t)$, 都有

$$|y_2(t)| \leq \max \left\{ \beta_2(|y_2(0)|, t), (1 + \epsilon) \sup_{t \geq 0} |\sigma_1(y_1(t))| \right\}, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.530)$$

考虑到饱和函数 σ_1 的饱和值是 M_1 。因此, 存在一个有限的时刻 $T_1 \geq 0$, 使得

$$|y_2(t)| \leq (1 + \epsilon)M_1 \quad \forall t \geq T_1 \quad (5.531)$$

并且相应地有,

$$|y_2(t) + \sigma_1(y_1(t))| \leq (2 + \epsilon)M_1 \leq M_2, \quad \forall t \geq T_1 \quad (5.532)$$

也就是说, 当 $t \geq T_1$ 时, $y_2(t) + \sigma_1(y_1(t))$ 将处于函数 σ_2 的未饱和区域 $[-M_2, M_2]$ 中。此时可以将由式(5.528)和式(5.529)描述的闭环系统重新写成

$$\dot{y}_1(t) = -\sigma_1(y_1(t)) + y_2^2(t) \quad (5.533)$$

$$\dot{y}_2(t) = -y_2(t) - \sigma_1(y_1(t)) \quad (5.534)$$

在此基础上, 继续分析由式(5.533)定义的 y_1 -子系统。注意到状态分量 y_2 的有界性条件(5.531), 即 $|y_2(t)| \leq (1+\epsilon)M_1$ 对所有 $t \geq T_1$ 都满足。取 M_1 满足 $M_1 > (1+\epsilon)^2 M_1^2$, 即 $M_1 < 1/(1+\epsilon)^2$, 取 ϵ' 满足 $0 < \epsilon' \leq 1/((1+\epsilon)^2 M_1) - 1$ 。那么, 存在 $\beta_1 \in \mathcal{KL}$ 使得对于任意初始时刻 $t_0 \geq T_1$, 任意初始状态 $y_1(t_0)$ 和满足有界性条件(5.531)的任意 $y_2(t)$ 都有

$$|y_1(t)| \leq \max \left\{ \beta_1(|y_1(t_0)|, t), (1+\epsilon') \sup_{\tau \geq T_1} |y_2^2(\tau)| \right\}, \quad \forall t \geq t_0 \quad (5.535)$$

于是, 存在一个有限的时刻 $T_2 > T_1$ 使得当 $t \geq T_2$ 时, $y_1(t)$ 将进入 σ_1 的未饱和区域 $[-M_1, M_1]$ 中。此时可以进一步将由式(5.533)和式(5.534)描述的闭环系统重新写成

$$\dot{y}_1(t) = -y_1(t) + y_2^2(t) \quad (5.536)$$

$$\dot{y}_2(t) = -y_2(t) - y_1(t) \quad (5.537)$$

利用基于局部近似线性化的局部稳定判据(定理 2.7)能够证明, 该系统在原点处局部渐近稳定。而基于上述讨论, 通过将 M_1 选取得足够小, 能够保证闭环系统状态 $\mathbf{y}(t)$ 在有限时间内进入该系统的吸引域, 进而保证全局收敛性。根据定义 2.2, 由式(5.528)和式(5.529)描述的原闭环系统在原点处全局渐近稳定。

例 5.28 中针对二阶被控对象的控制器设计与分析过程完全可以被推广到高阶的前馈型被控对象:

$$\dot{y}_i = \sum_{j=i+1}^n y_j + u + \phi_i(y_{i+1}, \dots, y_n, u), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.538)$$

其中, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, 函数 $\phi_i: \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 需满足特定的增长条件。相应的控制器具有如下形式:

$$u = -\sigma_n(y_n + \sigma_{n-1}(y_{n-1} + \dots + \sigma_1(y_1)) \dots) \quad (5.539)$$

其中, $\sigma_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 是满足特定条件的饱和函数。详细的讨论见文献[273]。

5.4.2 基于前推法的控制器设计

本节引入坐标变换将 5.4.1 节的前推法控制器设计结果进一步推广到一类形式更加一般的前馈型被控对象。

考虑被控对象:

$$\dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_2, x_3, \dots, x_n, u) \quad (5.540)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + f_2(x_3, \dots, x_n, u) \quad (5.541)$$

⋮

$$\dot{x}_n = u + f_n(u) \quad (5.542)$$

其中, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, 函数 $f_i: \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 是局部李普希茨的并且可以写成 (\boldsymbol{x}, u) 的二次或更高次函数相加的形式。

对于该被控对象, 考虑如下形式的控制器:

$$u = -\sigma_n(\boldsymbol{T}_n \boldsymbol{x} + \sigma_{n-1}(\boldsymbol{T}_{n-1} \boldsymbol{x} + \dots + \sigma_1(\boldsymbol{T}_1 \boldsymbol{x})) \dots) \quad (5.543)$$

其中, 对于 $i = 1, 2, \dots, n$, $\boldsymbol{T}_i \in \mathbb{R}^n$ 是常向量, $\sigma_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是如下形式的饱和函数:

$$\sigma_i(r) = M_i \text{sat}\left(\frac{r}{M_i}\right) = \text{sign}(r) \min\{|r|, M_i\}, \quad i = 1, 2 \quad (5.544)$$

其中, M_i 是正的常数。

定理 5.10 (前馈型非线性被控对象的前推法控制器设计) 存在 $\boldsymbol{T}_i \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 和饱和函数 σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 使得由式(5.540)~式(5.542)描述的被控对象及控制器(5.543)构成的闭环系统在原点处全局渐近稳定。

为证明定理 5.10, 可以定义新的状态变量

$$y_i = \sum_{j=i}^n \frac{(n-i)!}{(n-j)!(j-i)!} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.545)$$

其中, 对任意正整数 k , 记 $k! = k(k-1)\dots 1$, 并默认 $0! = 1$ 。这样能够将以 \boldsymbol{x} 为状态的被控对象变换为以 \boldsymbol{y} 为状态的对象(5.538)的形式, 并进而利用如式(5.539)所示的控制器使闭环系统在原点处全局渐近稳定。

前推法利用饱和控制进行递归设计的思想同样适用于具有广义前馈结构的其他被控对象, 比如球杆系统 (ball and beam system)。

例 5.29 (球杆系统的前推法控制器设计) 球杆系统由一个倾斜角可调节的直线轨道和一个球组成 (如图 5-28 所示)。

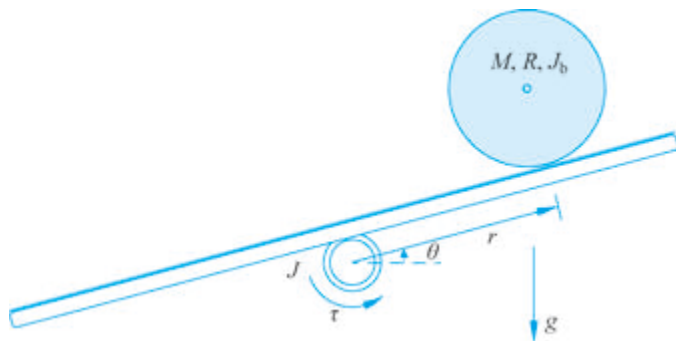


图 5-28 球杆系统示意图

球受重力作用, 在轨道上滚动。通过改变施加在轨道上的力矩来改变轨道的倾斜角, 进而调节球的位置和速度。使用如下微分方程描述球杆系统:

$$0 = \left(\frac{J_b}{R^2} + M\right) \ddot{r} + Mg \sin \theta - M r \dot{\theta}^2 \quad (5.546)$$

$$\tau = (Mr^2 + J + J_b)\ddot{\theta} + 2Mr\dot{r}\dot{\theta} + Mgr \cos \theta \quad (5.547)$$

其中, r 是球的位置, R 是球的半径, M 是球的质量, J_b 是球的转动惯量, θ 是轨道的倾斜角度, J 是轨道的转动惯量, g 是重力加速度, τ 是施加在轨道上的力矩。

借助反馈线性化的思想定义等效控制输入 v 使得

$$\tau = 2Mr\dot{r}\dot{\theta} + Mgr \cos \theta + (Mr^2 + J + J_b)v \quad (5.548)$$

能够将子系统(5.547)转化为

$$v = \ddot{\theta} \quad (5.549)$$

在此基础上, 定义状态变量 $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3, z_4]^T$, 其中

$$z_1 = r \quad (5.550)$$

$$z_2 = \frac{M}{J_b/R^2 + M}\dot{r} \quad (5.551)$$

$$z_3 = \theta \quad (5.552)$$

$$z_4 = \dot{\theta} \quad (5.553)$$

这样就把由式(5.546)和式(5.549)构成的被控对象模型进一步转化为

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (5.554)$$

$$\dot{z}_2 = -g \sin z_3 + z_1 z_4^2 \quad (5.555)$$

$$\dot{z}_3 = z_4 \quad (5.556)$$

$$\dot{z}_4 = v \quad (5.557)$$

在此基础上, 在等效控制输入 v 中引入对 z_3 和 z_4 的负反馈, 也就是取

$$v = -k_3 z_3 - k_4 z_4 + u \quad (5.558)$$

其中, k_3 和 k_4 是正的常数, u 是新的等效控制输入, 并定义新的状态变量

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T = \mathbf{T}z \quad (5.559)$$

其中,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -k_3/g & -(k_3 + k_4)/g & k_4 + 1 & 1 \\ 0 & -k_3/g & k_4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.560)$$

进而能够将由式(5.546)和式(5.547)描述的原被控对象模型转化为

$$\dot{y}_1 = y_2 - (k_3 + k_4)(y_3 - \sin y_3) - \frac{2k_3}{g} z_1 y_4^2 + u \quad (5.561)$$

$$\dot{y}_2 = -k_3(y_3 - \sin y_3) - \frac{k_3}{g} z_1 y_4^2 + u \quad (5.562)$$

$$\dot{y}_3 = y_4 \quad (5.563)$$

$$\dot{y}_4 = -k_3 y_3 - k_4 y_4 + u \quad (5.564)$$

不难看出, (y_1, y_2) -子系统具有类似于前述被控对象(5.538)的形式, 而 (y_3, y_4) -子系统本身是稳定的线性时不变系统。因此, 以 u 作为控制输入, 设计形如式(5.539)的饱和控制器

$$u = -\sigma_2(y_2 + \sigma_1(y_1)) \quad (5.565)$$

其中, σ_1 和 σ_2 具有的式(5.544)形式。需要指出的是, 与式(5.544)相比, 此处的 (y_1, y_2) -子系统多出了依赖于 z_1 和 y_4 (也就是依赖于 y_1, y_2, y_3, y_4) 的项 $z_1 y_4^2$ 。但是, 通过选取足够大的 k_3 和 k_4 并为 σ_1 和 σ_2 选取适当的饱和值 M_1 和 M_2 , 仍然能够保证受控的 (y_1, y_2) -子系统在原点处全局渐近稳定, 并进而保证受控的整个 (y_1, y_2, y_3, y_4) -系统在原点处全局渐近稳定。

此外, 对于二阶的 (y_1, y_2) -子系统, 即使去掉式(5.565)中对 y_1 的饱和, 也就是取

$$u = -\sigma_2(y_2 + y_1) \quad (5.566)$$

也能使闭环系统在原点处全局渐近稳定^[273]。

对于由式(5.548)、式(5.550)~式(5.553)、式(5.558)、式(5.559)、式(5.566)构成的控制器, 图 5-29、图 5-30 和图 5-31 所示分别为相应的闭环系统的状态曲线和控制输入曲线(其中, 被控对象的参数 $J_b = 2 \times 10^{-6}$ 、 $R = 0.01$ 、 $M = 0.05$ 、 $g = 9.8$ 、 $J = 0.02$, 控制器的参数 $k_3 = 4$ 、 $k_4 = 4$ 、 $M_2 = 1$ (即函数 σ_2 的饱和值), 仿真的初始状态 $(r(0), \dot{r}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)) = (0.5, 0.2, 0, 0)$, 各物理量遵循国际单位制标准)。

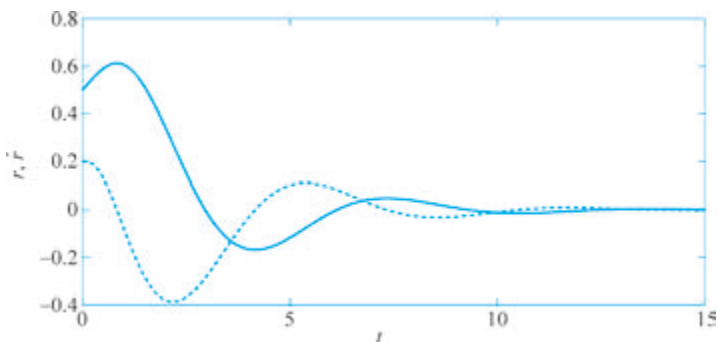


图 5-29 受控的球杆系统状态 (r, \dot{r}) 的曲线

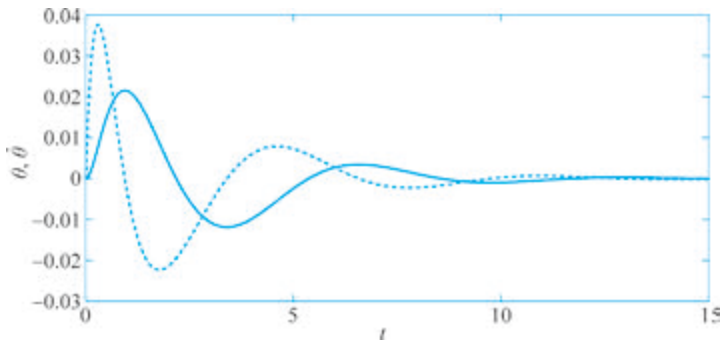


图 5-30 受控的球杆系统状态 $(\theta, \dot{\theta})$ 的曲线

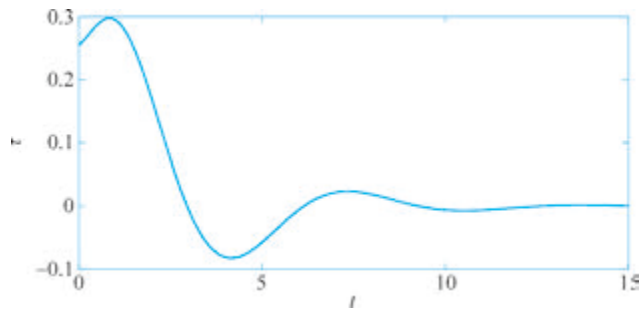


图 5-31 受控的球杆系统的控制输入 τ 的曲线

5.5 注记

20 世纪 50 年代, Y. Z. Tsypkin 在研究继电(开关)控制系统时揭示了滑动模态现象(即状态在不同动力学模态之间的不连续边界处滑动), 而 S. V. Emalyanov 认为产生滑动模态是实现变结构控制的主要手段。此后, V. A. Utkin 在滑模控制的发展中发挥了重要作用, 其所提出的等效控制方法^[274]被认为是刻画和设计滑动模态的有效方法, 相关综述见文献^[275]。需要指出的是, 这种等效控制的思想与串级控制以及构造性控制中虚拟控制的思想是统一的^[268]。滑模控制或更一般的变结构控制通过在不同的连续动力学之间进行切换实现期望的控制目标, 也就是说, 滑模控制器是被控对象状态及其他可测量变量的非连续函数, 因此滑模控制本质上是一种非连续控制。由于是在不同的连续动力学模态之间切换, 因此滑模控制系统最终的状态轨迹未必处于某个单一模态的状态范围中, 而可能在不同模态的状态范围之间滑动。这便形成了滑动面。对于特定结构的被控对象, 滑模控制对动力学中的不确定性不敏感, 并能够基于简化的被控对象模型使闭环系统状态在有限时间内到达期望的收敛集(滑动面)并最终趋近于期望工作状态。即使是在今天, 滑模控制仍然是解决许多非线性控制问题的首选方法^[268, 274, 276-280]。当然, 尽管有这些优点, 单纯的滑模控制通常仅能处理动力学中匹配的不确定性(即不确定项通过控制量通道进入并影

响被控对象), 并且动态不确定性会导致系统状态轨迹在滑动面附近出现抖振。常规的滑模控制器中包含不连续的符号函数, 相应的闭环系统动力学也是不连续的。严格定义这类状态轨迹并分析其动态特性并不简单。尤其是当滑模控制系统实现过程中无可避免地引入时延、滞环等非理想环节时, 其分析更为复杂^[274]。5.2.1 节仅简要讨论了如何刻画滑模控制系统在非连续滑动面附近的状态轨迹。

20 世纪 70 年代, 微分几何^[281]作为工具被引入非线性控制, 使得线性控制的许多概念能够被推广到非线性控制, 产生了几何非线性控制理论。R. W. Brockett、V. Jurdjevic、R. Hermann、A. Krener、C. Lobry、H. J. Sussman 等在这方面做出了重要贡献, 包括围绕控制-仿射型被控对象系统地建立了可控性、可观性概念及基于李代数的判据^[282-288], 提出了反馈线性化方法用于非线性控制器设计^[289]。而 M. Fliess 等利用微分代数提出了微分平坦 (differential flatness) 的概念^[290], 并用其解决运动受限时的控制问题。A. Isidori、C. Byrnes 提出了零动态的概念, 将线性系统零点的思想推广到非线性系统^[291]。几何控制理论能够更好地解决许多工程控制问题, 比如航天器控制^[292]、大迎角飞行控制^[293]、拖车跟踪控制^[294]、行走机器人控制^[295], 乃至量子控制问题^[296, 297], 出版的相关教材参见文献^[14, 17, 298, 299]等。

20 世纪 90 年代, A. Isidori、C. Byrnes 将线性伺服机制设计方法中用到的内部模型 (内模) 引入非线性控制器设计, 提出了一种非线性伺服机制的设计方法, 用于解决非线性系统的输出调节问题^[291]。利用内模能够构造一个对应于零跟踪误差的不变流形, 并使该流形局部稳定。J. Huang、W. J. Rugh 通过限制外部系统的响应速度将输出调节的结果推广到允许较大干扰的情形^[300]。H. K. Khalil 等利用高增益观测器解决了初始条件任意大时的非线性伺服机构设计问题^[301, 302]。相关专著参见文献^[303-305]。

通过综合运用稳定性、镇定和鲁棒控制等思想, 20 世纪 90 年代发展出了构造性的非线性控制方法^[119]。反步法这一术语最早见于 P.V. Kokotović 的发表于《IEEE 控制系统》杂志的文章^[149]⁴², 其利用被控对象的下三角结构 (广义串级结构), 通过递归的方式为不同子系统设计虚拟控制器并最终为整个被控对象构造控制器。但在此之前, 有不少学者已独立研究过相关思想, 提出了“加积分器” (adding an integrator) 等方法^[174, 306-311]。反步法的优点在于能够处理特定结构被控对象中的不确定性: 针对结构化不确定性能够实施自适应反步法^[312, 313], 而针对非结构化不确定性能够实施鲁棒反步法^[162, 314-316]。反步法等构造性控制方法迅速得到非线性控制领域的广泛关注。在同一时期还发展出了针对其他不同结构被控对象的控制方法, 比如针对前馈型被控对象的前推法^[273, 317, 318] 以及针对混合结构被控对象的反步法和前推法交替运用^[119]。相关的专著还有文献^[151, 207, 299, 304, 319, 320]。

⁴²即 P. V. Kokotović 在 1991 年的 IEEE 决策与控制会议上所做的伯德奖讲座内容。

P. V. Kokotović、L. Praly、M. Janković、A. Teel、R. Sepulchre、F. Mazenc 等在这方面做出了重要贡献。

然而，总体而言，现有的非线性控制方法仍然以实现回路级的预设工作点镇定或预设轨迹跟踪为主。要实现高水平的自主协同控制，需要系统性地研究信息受限条件下面向约束满足的非线性控制。

5.6 习题

习题 5.1 考虑由如下模型描述的柔性单关节机械臂^[110]:

$$I\ddot{q}_1 + mgL \sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \quad (5.567)$$

$$J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u \quad (5.568)$$

其中， q_1 和 q_2 分别表示角度， I 和 J 分别表示转动惯量， k 是弹性系数， m 是总质量， L 是臂长， u 是力矩输入。以 q_1 作为输出，以 u 作为控制输入，证明该被控对象的相对阶为 2，并对该被控对象实施输入-输出线性化。

习题 5.2 考虑由如下模型描述的励磁控制直流电机^[21]:

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + u \quad (5.569)$$

$$\dot{x}_2 = -bx_2 + k - cx_1x_3 \quad (5.570)$$

$$\dot{x}_3 = \theta x_1x_2 \quad (5.571)$$

其中， x_1 、 x_2 、 x_3 分别表示励磁电流、电枢电流、旋转角速度， a 、 b 、 c 、 k 、 θ 都是正的常数。以 x_3 作为输出，以 u 作为控制输入，当 $x_2 \neq 0$ 时，证明该被控对象的相对阶是 2，对其进行输入-输出线性化，并说明该被控对象是最小相位系统。

习题 5.3 考虑由如下模型描述的磁悬浮系统^[21]:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.572)$$

$$\dot{x}_2 = g - \frac{k}{m}x_2 - \frac{L_0ax_3^2}{2m(a+x_1)^2} \quad (5.573)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L(x_1)} \left(-Rx_3 + \frac{L_0ax_2x_3}{(a+x_1)^2} + u \right) \quad (5.574)$$

其中， $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ 是状态， $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入。

- 以 $y = x_1$ 作为输出，说明该被控对象能够实现输入-输出线性化；
- 基于反馈线性化，设计控制器使得输出 $y = x_1$ 渐近跟踪参考信号 $y_r(t) = 0.05 + 0.01 \sin t$ ，并进行数值仿真（仿真参数： $m = 0.1\text{kg}$ ， $k = 0.001\text{N/m/s}$ ， $g = 9.8\text{m/s}^2$ ， $a = 0.05\text{m}$ ， $L_0 = 0.01\text{H}$ ， $L_1 = 0.02\text{H}$ ， $R = 1 \Omega$ ）。

习题 5.4 考虑由如下简化运动学模型描述的垂直起降飞行器^[321, 322]:

$$\ddot{x} = -u_1 \sin \theta \quad (5.575)$$

$$\dot{y} = u_1 \cos \theta - 1 \quad (5.576)$$

$$\ddot{\theta} = u_2 \quad (5.577)$$

其中, x 和 y 分别表示飞行器质心的水平坐标和竖直坐标, θ 表示滚转角, 参数 -1 是归一化处理后的重力加速度, u_1 和 u_2 分别是向下的推力输入和滚转力矩输入。以 u_1 和 u_2 作为控制输入, 设计控制器使该被控对象实现输入-输出(动态)反馈线性化。

习题 5.5 考虑被控对象:

$$\dot{x}_1 = a \sin x_2 \quad (5.578)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2^2 + u \quad (5.579)$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, a 是正的常数。说明在原点的一个邻域内能够使该被控对象实现全状态线性化, 并设计控制器将该被控对象转化为串联积分器的形式。

习题 5.6 考虑被控对象^[14]:

$$\ddot{y}(t) + a_1(t)\dot{y}^2(t) + a_2(t)y^5(t) \sin(4y(t)) = b(t)u(t) \quad (5.580)$$

其中, $y \in \mathbb{R}$ 是输出, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, 变量 a_1 、 a_2 、 b 随时间 t 变化并且对所有 $t \geq 0$ 都满足

$$a_1(t) \leq 1, \quad |a_2(t)| \leq 2, \quad 1 \leq |b(t)| \leq 4 \quad (5.581)$$

设计滑模控制器使得输出 y 有界且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad (5.582)$$

习题 5.7 考虑被控对象^[21]:

$$\dot{x}_1 = x_2 + ax_1 \sin x_1 \quad (5.583)$$

$$\dot{x}_2 = bx_1x_2 + u \quad (5.584)$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, a 和 b 都是未知的常数并满足 $|a - 1| \leq 1$, $|b - 1| \leq 2$ 。设计滑模控制器使得闭环系统在原点处全局渐近稳定。

习题 5.8 考虑被控对象^[18]:

$$\dot{x}_1 = x_1x_2 \quad (5.585)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u \quad (5.586)$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入。设计滑模控制器使得闭环系统在原点处全局渐近稳定。

习题 5.9 考虑被控对象^[271]:

$$\dot{x}_1 = x_1^2x_2 \quad (5.587)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.588)$$

其中, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入。设计滑模控制器使得闭环系统在原点处全局渐近稳定。

习题 5.10 考虑被控对象^[21]:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \tanh x_2 \quad (5.589)$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + x_3 \quad (5.590)$$

$$\dot{x}_3 = u + \delta(x) \quad (5.591)$$

其中, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 是未知的函数。假设存在已知的函数 $\bar{\delta}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$, 使得 $|\delta(\boldsymbol{x})| \leq \bar{\delta}(\boldsymbol{x})$ 对所有 \boldsymbol{x} 都成立。基于滑模控制的思想, 设计连续的状态反馈控制器使得对于满足 $|\boldsymbol{x}(0)| \leq \bar{x}_0$ 的任意初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$ 都能保证系统状态轨迹 $\boldsymbol{x}(t)$ 有界且最终进入 $\{x_1: |x_1| \leq 0.01\}$ 的范围内。

习题 5.11 考虑被控对象:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, w) \quad (5.592)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, w) + g(x_1, x_2, w)u \quad (5.593)$$

其中, $w \in \mathbb{R}$ 表示干扰输入, 其他变量的定义与式(5.249)和式(5.250)相同。假设干扰 w 是有界的:

- 存在已知的常数 $\bar{w} \geq 0$, 使得

$$|w(t)| \leq \bar{w}, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.594)$$

对 f_1 、 f_2 和 g 作如下假设:

- 已知函数 $\bar{f}_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 和 $\bar{f}_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, 使得

$$|f_1(x_1, x_2, w)| \leq \bar{f}_1(x_1, x_2, \bar{w}) \quad (5.595)$$

$$|f_2(x_1, x_2, w)| \leq \bar{f}_2(x_1, x_2, \bar{w}) \quad (5.596)$$

对所有 x_1, x_2 以及所有 $|w| \leq \bar{w}$ 都成立:

- 已知常数 $\underline{g} > 0$, 使得

$$g(x_1, x_2, w) \geq \underline{g} \quad (5.597)$$

对所有 x_1, x_2 以及所有 $|w| \leq \bar{w}$ 都成立。

同时, 对 x_1 -子系统作如下假设:

- 已知连续可导的函数 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 使得系统

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \phi(x_1) + s, w) \quad (5.598)$$

以 (s, w) 作为输入是输入到状态稳定的, 即存在 $\beta_1 \in \mathcal{KL}$ 和 $\gamma \in \mathcal{K}$, 使得

$$|x_1(t)| \leq \max\{\beta_1(|x_1(0)|, t), \gamma_1(\|[s, w]^T\|_\infty)\}, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.599)$$

设计滑模控制器使得闭环系统状态 $[x_1, x_2]^T$ 有界且

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |x_1(t)| \leq \gamma_1(\bar{w}) \quad (5.600)$$

习题 5.12 考虑由式(5.440)~式(5.442)描述的被控对象。基于反步法设计控制器,使闭环系统所有状态均有界,并且使状态 x_1 趋近于固定的设定值 r_1 。

习题 5.13 考虑被控对象^[271]:

$$\dot{x}_1 = x_1^2 x_2 \quad (5.601)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.602)$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入。设计连续的状态反馈控制器使得闭环系统在原点处全局渐近稳定。

进一步考虑被控对象:

$$\dot{x}_1 = a x_1^2 x_2 \quad (5.603)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.604)$$

其中,未知常数 a 满足 $0 < a \leq \bar{a}$ (\bar{a} 已知)。设计连续的状态反馈控制器使得闭环系统在原点处全局渐近稳定。

习题 5.14 考虑被控对象^[21]:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \tanh x_2 \quad (5.605)$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + x_3 \quad (5.606)$$

$$\dot{x}_3 = u + \delta(x) \quad (5.607)$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 是未知的函数。假设存在已知的 $\bar{\delta} \in \mathcal{K}$, 使得 $|\delta(x)| \leq \bar{\delta}(|x|)$ 对所有 \mathbf{x} 成立。设计连续的状态反馈控制器使得闭环系统在原点处全局渐近稳定。

习题 5.15 考虑被控对象:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + x_2 + \delta_1(x_1, w) \quad (5.608)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + x_3 + \delta_2(x_1, x_2, w) \quad (5.609)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + u + \delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n, w) \quad (5.610)$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^p$ 表示未知的外部干扰,所有的 f_i 都是充分光滑的函数, δ_i 表示动力学中的未知部分。假设 f_i 和 δ_i 满足如下条件:对每个 $i = 1, 2, \dots, n$, 存在非负的常数 a_i 和 b_i , 使得

$$|f_i(x_1, x_2, \dots, x_i)| \leq a_i |x_1, x_2, \dots, x_i|^T \quad (5.611)$$

$$|\delta_i(x_1, x_2, \dots, x_i, w)| \leq b_i |x_1, x_2, \dots, x_i, w|^T \quad (5.612)$$

对所有 x_1, x_2, \dots, x_i, w 成立。设计状态反馈控制器使得闭环系统输入到状态稳定（以 \boldsymbol{x} 作为状态，以 \boldsymbol{w} 作为输入）。

习题 5.16 ▲ 考虑被控对象^[19]：

$$\dot{x}_1 = a_1 x_2 x_3 + u_1 \quad (5.613)$$

$$\dot{x}_2 = a_2 x_1 x_3 + u_2 \quad (5.614)$$

$$\dot{x}_3 = a_3 x_1 x_2 \quad (5.615)$$

其中， $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ 是状态， $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是控制输入， a_1, a_2, a_3 是常数，且 $a_3 \neq 0$ 。三维空间中受到正交力矩作用的旋转刚体的角动量方程就具有这种形式。设计状态反馈控制器使得闭环系统在原点处全局渐近稳定。

习题 5.17 ▲ 考虑被控对象^[323]：

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2^3 \quad (5.616)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.617)$$

其中， $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 是状态， $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入。设计形如 $u = \phi(\boldsymbol{x})$ 的状态反馈控制器使闭环系统状态有界且趋近于原点。