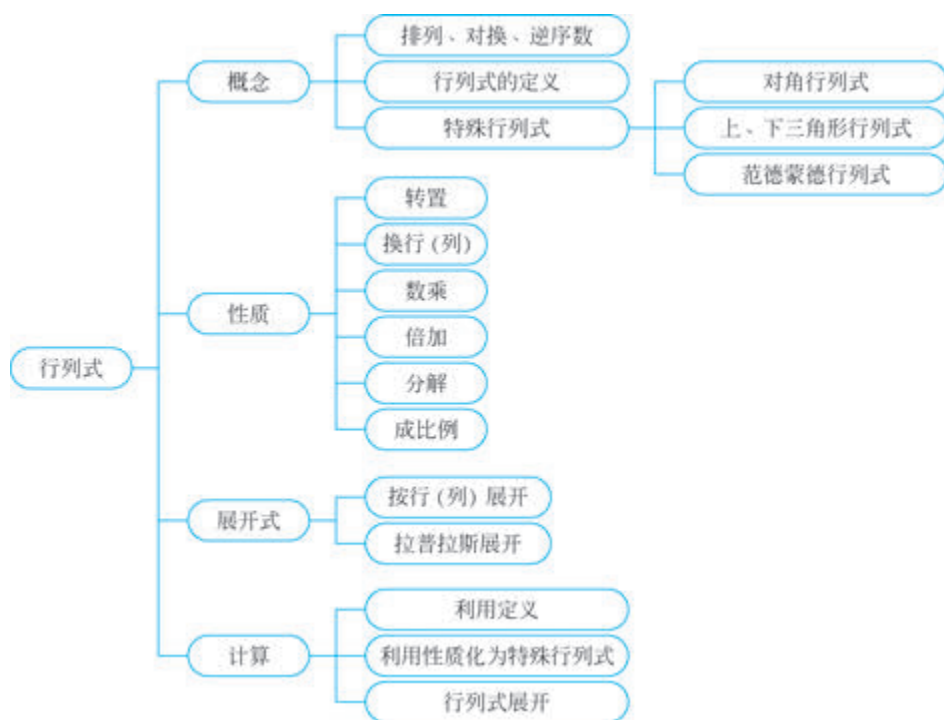


## 行列式

### 1.1 本章知识结构图



## 1.2 内容提要

### 1.2.1 二阶、三阶行列式

用符号  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  表示  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称其为**二阶行列式**, 其中  $a_{ij}$  ( $i=1, 2; j=1, 2$ ) 称为行列式的**元素**.

二阶行列式的定义可用串线的方式加以记忆. 按如下方式对行列式中的元素进行连线,



则二阶行列式等于实线连接的元素乘积减去虚线连接的元素乘积.

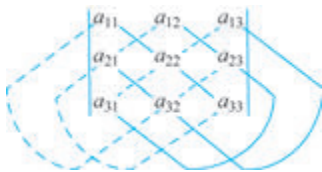
用符号  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  表示  $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} -$

$a_{13}a_{22}a_{31}$ , 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

称其为**三阶行列式**.

三阶行列式的定义也可用串线的方式加以记忆. 按如下方式对行列式中的元素进行连线, 则三阶行列式等于每条线上三个元素乘积的代数和, 其中实线上元素的乘积带正号; 虚线上元素的乘积带负号.



### 1.2.2 排列

将  $n$  个不同的元素排成一个有序的形式, 叫作这  $n$  元素的一个 **$n$ 级排列**, 简称**排列**,  $n$  个不同元素的所有排列的种数为  $n!$ .

对于  $n$  个不同的元素, 先规定各元素之间有个标准次序(常用的标准是从小到大),

于是  $n$  个不同元素的任一排列中, 某两个元素的先后次序与标准次序不同时, 就说有一个**逆序**. 排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**, 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**; 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

特别的, 由  $n$  个自然数  $1, 2, \dots, n$  组成的一个有序数组称为一个  $n$  **级排列**.  $n$  级排列规定的标准次序为从小到大, 也称为**自然序**.  $n$  级排列  $i_1 i_2 \dots i_n$  的逆序数记为  $N(i_1 i_2 \dots i_n)$ ;  $n$  级排列的种数为  $n!$ , 其中奇排列、偶排列各占一半.

### 1.2.3 对换

将一个排列中的两个数对调, 其余的数不动, 就会得到一个新排列, 称这样的变动为**对换**.

**对换的性质:**

- (1) 对换改变排列的奇偶性.
- (2) 任意一个  $n$  级排列与排列  $12 \dots n$  都可以经过有限次对换互变, 并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

### 1.2.4 $n$ 阶行列式

用符号 
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
 表示全部取自不同行、不同列的  $n$  个元素乘积  $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots$

$a_{nj_n}$  的代数之和, 称其为  **$n$  阶行列式**, 其中  $j_1 j_2 \dots j_n$  是一个  $n$  级排列, 定义中的代数是指每个乘积  $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  前都冠以符号  $(-1)^{N(j_1 j_2 \dots j_n)}$ , 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

这里  $\sum_{j_1 j_2 \dots j_n}$  表示对全部的  $n$  级排列  $j_1 j_2 \dots j_n$  求和.  $n$  阶行列式也可简记为  $D = |a_{ij}|_n$  或  $\det(a_{ij})$ , 其中  $a_{ij} (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n)$  称为行列式的**元素**.

规定一阶行列式等于行列式中的元素, 即  $|a| = a$ , 注意不要与绝对值的记号混淆.

**注** 显然二阶、三阶行列式是  $n$  阶行列式的特例.

$n$  阶行列式的等价定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

### 1.2.5 行列式的性质

(1) **转置** 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix},$$

$D^T$  称为  $D$  的**转置行列式**, 行列式与其转置行列式相等, 即有  $D = D^T$ .

(2) **换行(列)** 交换行列式的两行(列), 行列式变号. 以三阶行列式为例, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

(3) **数乘** 用数  $k$  乘行列式等于将  $k$  乘到行列式的某一行(列)中所有元素, 反过来一个行列式可以按行(列)提取公因式. 以三阶行列式为例, 即

$$k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}.$$

特别的, 若行列式中有一行元素为零, 则行列式为零.

(4) **倍加** 将行列式某一行(列)的所有元素乘以一个数对应加到另一行(列)的元素上, 行列式值不变. 以三阶行列式为例, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{11} & a_{32} + ka_{12} & a_{33} + ka_{13} \end{vmatrix}.$$

(5) **分解** 行列式某一行(列)的元素均为两数之和, 可按这一行(列)将其分解为两个行列式相加. 以三阶行列式为例, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(6) **成比例** 一个行列式中若有两行(列)的元素对应成比例, 则行列式的值为零. 特别的, 一个行列式中若有两行(列)元素相同, 则行列式的值为零.

### 1.2.6 余子式、代数余子式

将行列式  $D = |a_{ij}|_n$  的第  $i$  行, 第  $j$  列元素去掉, 剩余元素按原顺序构成的  $n-1$  阶行列式, 称为元素  $a_{ij}$  的**余子式**, 记为  $M_{ij}$ ; 称  $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$  为元素  $a_{ij}$  的**代数余子式**.

#### \* 1.2.7 子式、子式的余子式、子式的代数余子式

在  $n$  阶行列式  $D$  中任选  $k$  行  $k$  列, 交叉位置的元素按原顺序构成的  $k$  阶行列式  $D_k$

称为  $D$  的一个  $k$  阶子式, 去掉选定的  $k$  行  $k$  列元素后余下的元素按原顺序构成的  $n-k$  阶行列式称为子式  $D_k$  的余子式, 记为  $M_k$ . 若选定的  $k$  行  $k$  列元素的行标为  $i_1, i_2, \dots, i_k$ , 列标为  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , 则  $(-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} M_k$  称为子式  $D_k$  的代数余子式.

### 1.2.8 行列式展开定理

(1) **按行列展开定理** 行列式等于它任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和; 行列式任意一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零. 即若  $D = |a_{ij}|_n$ , 则

$$a_{i_1} A_{j_1} + a_{i_2} A_{j_2} + \dots + a_{i_n} A_{j_n} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

\* (2) **拉普拉斯定理** 行列式等于它任意选定  $k$  行(列)的全部  $k$  阶子式与其代数余子式乘积之和. 若在  $n$  阶行列式  $D$  中任意取定  $k$  行后得到的子式为  $M_1, M_2, \dots, M_t$ , 它们的代数余子式分别为  $A_1, A_2, \dots, A_t$ , 则

$$D = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \dots + M_t A_t.$$

### 1.2.9 特殊的行列式的计算

(1) 上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

(2) 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

(3) 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

(4) 分块上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & y_{11} & \cdots & y_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} & y_{k1} & \cdots & y_{km} \\ 0 & \cdots & 0 & z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix}.$$

(5) 分块下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{11} & \cdots & y_{1k} & z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{mk} & z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix}.$$

(6) 分块对角形行列式

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix}.$$

(7) 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (a_i - a_j).$$

## 1.3 典型例题分析

### 1.3.1 题型一 排列问题

**例 1.1** 若 7 级排列 214*i*5*k*6 是奇排列, 确定 *i*, *k* 的值.

**解** 由于 214*i*5*k*6 为一个 7 级排列, *i*, *k* 的可能取值为 3, 7, 或 7, 3, 当 *i*=3, *k*=7 时,  $N(2143576) = 0+1+0+1+0+0+1 = 3$ , 排列为奇排列, 并且由对换的性质可知排列 2147536 为偶排列, 故 *i*=3, *k*=7.

**例 1.2** 在 6 阶行列式中元素乘积  $a_{21}a_{34}a_{15}a_{63}a_{42}a_{56}$  应该带什么符号?

**解法 1** 行标的逆序数  $N(231645) = 0+0+2+0+1+1 = 4$ , 列标的逆序数  $N(145326) = 0+0+0+2+3+0 = 5$ , 因此  $N(231645) + N(145326) = 4+5 = 9$ , 故元素乘积  $a_{21}a_{34}a_{15}a_{63}a_{42}a_{56}$  带负号.

**解法 2** 由交换律可知, 元素乘积  $a_{21}a_{34}a_{15}a_{63}a_{42}a_{56}$  与  $a_{15}a_{21}a_{34}a_{42}a_{56}a_{63}$  相等, 并且交换两个元素就会引起行标的逆序数与列标的逆序数奇偶性各变动一次, 这样元素乘积  $a_{21}a_{34}a_{15}a_{63}a_{42}a_{56}$  与  $a_{15}a_{21}a_{34}a_{42}a_{56}a_{63}$  应带的符号相同, 而后者的符号由列标排列的奇偶性决定,  $N(514263) = 0+1+1+2+0+3 = 7$ , 故元素乘积  $a_{21}a_{34}a_{15}a_{63}a_{42}a_{56}$  带负号.

**例 1.3** 若规定排列  $a_1 a_2 \cdots a_n$  的逆序数为  $k$ , 求排列  $a_n a_{n-1} \cdots a_1$  的逆序数.

**解** 若任意两个元素  $a_i$  和  $a_j$  在排列  $a_1 a_2 \cdots a_n$  中产生逆序, 则在排列  $a_n a_{n-1} \cdots a_1$  中就不产生逆序, 反之亦然. 因此排列  $a_1 a_2 \cdots a_n$  的逆序数与排列  $a_n a_{n-1} \cdots a_1$  的逆序数之和等于  $n$  个元素中取 2 个元素的组合数  $C_n^2$ , 从而排列  $a_n a_{n-1} \cdots a_1$  的逆序数为  $C_n^2 - k$ .

### 1.3.2 题型二 利用定义计算行列式

该题型适用于行列式中零元素较多的情形, 这样取自不同行、不同列的元素乘积中不为零的项较少. 在使用定义计算时应注意两点: 一是找齐取自不同行、不同列的元素乘积可能不为零的项; 二是需要计算出匹配的正负号.

**例 1.4** 用行列式的定义计算  $D_4 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & x-1 \\ 1 & 0 & x-2 & -1 \\ 2 & x-3 & -2 & 1 \\ x-4 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$  中  $x^4$  与  $x^3$  的

系数.

**解**  $x^4$  与  $x^3$  来自行列式  $D_4$  中的  $(-1)^{N(4321)}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ , 故  $x^4$  前的系数为  $(-1)^{N(4321)} = 1$ , 而  $x^3$  前的系数为  $(-1)^{N(4321)}(-1-2-3-4) = -10$ .

**例 1.5** 用行列式的定义计算  $D_4 = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ c_1 & x & c_2 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ .

**解** 根据行列式的定义, 有

$$D_4 = (-1)^{N(4132)} a_3 b_1 c_2 d_1 + (-1)^{N(4312)} a_3 b_2 c_1 d_1 = a_3 b_1 c_2 d_1 - a_3 b_2 c_1 d_1.$$

**注** 选取乘积不为零的项时, 为便于思考, 元素的选择可不必按行(列)的自然顺序, 但写出来的时候要按行标的自然序, 这样可以简化该项前所带正负号的计算.

**例 1.6** 用行列式的定义计算  $D_4 = \begin{vmatrix} 0 & y & 0 & x \\ x & 0 & y & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ y & 0 & x & 0 \end{vmatrix}$ .

**解** 根据行列式的定义, 有

$$\begin{aligned} D_4 &= (-1)^{N(2143)} yxyx + (-1)^{N(2341)} yyyy + (-1)^{N(4123)} xxxx + (-1)^{N(4321)} xyxy \\ &= yxyx - yyyy - xxxx + xyxy = 2x^2y^2 - y^4 - x^4. \end{aligned}$$

### 1.3.3 题型三 利用性质计算行列式

对于一般的行列式, 可利用行列式的性质将其化简成适合用定义计算的形式. 行列式性质中常用的有换行、数乘、倍加; 具体的解题技巧有“扫”“滚动”等.

**例 1.7** 已知  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2$ , 求行列式  $D = \begin{vmatrix} x_1 + y_1 & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ x_2 + y_2 & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ x_3 + y_3 & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix}$  的值.

## 解法 1

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} x_1 + y_1 & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ x_2 + y_2 & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ x_3 + y_3 & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_2 + c_3} \begin{vmatrix} 2(x_1 + y_1 + z_1) & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ 2(x_2 + y_2 + z_2) & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ 2(x_3 + y_3 + z_3) & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \begin{vmatrix} x_1 + y_1 + z_1 & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ x_3 + y_3 + z_3 & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_2 - c_1 \\ c_3 - c_1}} 2 \begin{vmatrix} x_1 + y_1 + z_1 & -x_1 & -y_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 & -x_2 & -y_2 \\ x_3 + y_3 + z_3 & -x_3 & -y_3 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{c_1 + c_2 + c_3} 2 \begin{vmatrix} z_1 & -x_1 & -y_1 \\ z_2 & -x_2 & -y_2 \\ z_3 & -x_3 & -y_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} -2 \begin{vmatrix} -x_1 & z_1 & -y_1 \\ -x_2 & z_2 & -y_2 \\ -x_3 & z_3 & -y_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} 2 \begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & z_1 \\ -x_2 & -y_2 & z_2 \\ -x_3 & -y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \times 2 = 4.
 \end{aligned}$$

**解法 2** 用行列式按列分解的性质, 将行列式  $D$  分解为  $C_2^1 \times C_2^1 \times C_2^1 = 8$  个行列式相

加, 但其中只有  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$  及  $\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & x_1 \\ y_2 & z_2 & x_2 \\ y_3 & z_3 & x_3 \end{vmatrix}$  的值不为零, 其余的行列式都有两列元

素相同, 值为零. 故

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & x_1 \\ y_2 & z_2 & x_2 \\ y_3 & z_3 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4.$$

**例 1.8** 计算行列式  $D_4 = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$ .

**解** 根据行列式的性质, 有

$$\begin{aligned}
 D_4 &\xrightarrow{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} \begin{vmatrix} a + 3b & a + 3b & a + 3b & a + 3b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = (a + 3b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{r_2 - br_1 \\ r_3 - br_1 \\ r_4 - br_1}} (a + 3b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a - b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a - b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a - b \end{vmatrix} = (a + 3b)(a - b)^3.
 \end{aligned}$$

**注** 在行列式的计算中, 一个常用的技巧是“**扫**”, 即首先构造出一个基本行(或基本列), 然后利用基本行(或基本列)将其余行(或列)中相同元素化为 0, 其核心思想是化简出尽量多的 0 元素.

**例 1.9** 计算行列式  $D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$ .

**解** 根据行列式的性质, 有

$$D_4 \xrightarrow[r_4 - r_2]{r_3 - r_1} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c - a & d - b & a - c & b - d \\ d - b & a - c & b - d & c - a \end{vmatrix} \xrightarrow[c_2 + c_4]{c_1 + c_3} \begin{vmatrix} a + c & b + d & c & d \\ b + d & c + a & d & a \\ 0 & 0 & a - c & b - d \\ 0 & 0 & b - d & c - a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按公式展开}} \begin{vmatrix} a + c & b + d \\ b + d & c + a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a - c & b - d \\ b - d & c - a \end{vmatrix}$$

$$= [(a + c)^2 - (b + d)^2][-(a - c)^2 - (b - d)^2].$$

**注** 利用行列式的性质, 尽量将行列式化为特殊行列式, 例如分块上三角形行列式、下三角形行列式, 分块对角形行列式等, 然后再使用公式降阶计算.

**例 1.10 (爪形行列式)** 计算行列式  $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ .

**解** 根据行列式的性质, 有

$$D_4 \xrightarrow[c_1 - \frac{1}{4}c_4]{c_1 - \frac{1}{2}c_2, c_1 - \frac{1}{3}c_3} \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \times 2 \times 3 \times 4 = -2.$$

**例 1.11** 计算行列式  $D_3 = \begin{vmatrix} a_2 + a_3 & a_3 + a_1 & a_1 + a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$ .

**解** 利用行列式的性质将行列式化为范德蒙德行列式

$$D_3 \xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{vmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & a_1 + a_2 + a_3 & a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{范德蒙德行列式}}$$

$$(a_1 + a_2 + a_3)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1).$$

**例 1.12** 计算行列式  $D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -b & b & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ 0 & 0 & -b & b \end{vmatrix}$ .

**解**  $D_4 \xrightarrow{c_3+c_4} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+a_4 & a_4 \\ -b & b & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2+c_3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2+a_3+a_4 & a_3+a_4 & a_4 \\ -b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$   
 $\xrightarrow{c_1+c_2} \begin{vmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4 & a_2+a_3+a_4 & a_3+a_4 & a_4 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)b^3$ .

**注** 在行列式的计算中, 一个常用的技巧是“滚动”, 即按照一定的顺序用前一行(或前一列)化简后一行(或后一列), 例如本题中首先将第 4 列加到第 3 列; 然后再将第 3 列加到第 2 列; 最后再将第 2 列加到第 1 列.

### 1.3.4 题型四 行列式按行或列展开

行列式按行(列)展开的性质建立了行列式与之较低一阶行列式之间的关系, 使用公式对行列式进行升、降阶再行计算.

**例 1.13** 计算行列式  $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 5 & -2 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -3 & -4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ .

**解**  $D_4 \xrightarrow{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3+r_1 \\ r_4-3r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & -9 & 0 \\ -6 & -13 & 21 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第 4 列展开}} \begin{vmatrix} 7 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & -9 \\ -6 & -13 & 21 \end{vmatrix}$   
 $= 3 \times \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -6 & -13 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-3r_1 \\ r_3+7r_1}} 3 \times \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -18 & -8 & 0 \\ 43 & 15 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} -18 & -8 \\ 43 & 15 \end{vmatrix}$   
 $= 3 \times (-18 \times 15 + 43 \times 8) = 222$ .

**例 1.14** 计算行列式  $D_4 = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$ .

解

$$\begin{aligned}
 D_4 &= \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & b & b \\ 0 & b & a & b & b \\ 0 & b & b & a & b \\ 0 & b & b & b & a \end{vmatrix} \xrightarrow[r_i - br_1]{i=2,3,4,5} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -b & a-b & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & a-b & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & a-b & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow[c_1 + \frac{b}{a-b}c_i]{i=2,3,4,5} \begin{vmatrix} 1 + \frac{4b}{a-b} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = \left(1 + \frac{4b}{a-b}\right)(a-b)^4 \\
 &= (a+3b)(a-b)^3.
 \end{aligned}$$

例 1.15 计算  $n(n \geq 3)$  阶行列式  $D_n =$ 

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

解 结合行列式的性质, 利用“扫”的技巧, 有

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} \xrightarrow[r_i - r_3]{i=1, \dots, n; i \neq 3} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\text{按第3列展开}} \begin{vmatrix} -2 & & & & & 0 \\ & -1 & & & & \\ 3 & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & n-3 \\ 0 & & & & & \end{vmatrix} = 6(n-3)!.
 \end{aligned}$$

\*\* 例 1.16 (带状行列式)

$$\text{计算行列式 } D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}.$$

解

$$D_n \xrightarrow{\text{将第1列分解}} \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{前行列式} \\ r_i - r_{i-1} \\ i=2, \dots, n \\ \hline \text{后行列式按} \\ \text{第1列展开} \end{array} \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= a^n + bD_{n-1},$$

类似地,

$$D_n \xrightarrow{\text{将第1列分解}} \begin{vmatrix} b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{前行列式} \\ c_i - c_{i-1} \\ i=2, \dots, n \\ \hline \text{后行列式按} \\ \text{第1列展开} \end{array} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= b^n + aD_{n-1},$$

从而有

$$\begin{cases} D_n = a^n + bD_{n-1} \\ D_n = b^n + aD_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aD_n = a^{n+1} + abD_{n-1} \\ bD_n = b^{n+1} + abD_{n-1} \end{cases} \Rightarrow (a-b)D_n = a^{n+1} - b^{n+1},$$

故

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n.$$

例 1.17 设行列式  $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ , 求

(1)  $A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44}$ ; (2)  $M_{41} + M_{42} + M_{43} + 2M_{44}$ .

解 (1) 由于  $A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} = 1 \times A_{14} + 1 \times A_{24} + 1 \times A_{34} + 1 \times A_{44}$ , 因此用“1, 1, 1, 1”替代行列式  $A$  中的第 4 列构造一个新的行列式,

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

可见  $B_1$  与  $A$  的第 4 列元素的代数余子式分别相同, 因此将  $B_1$  按第 4 列元素展开恰好等于  $A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44}$ , 故

$$\begin{aligned} A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} &= B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_2} 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 2 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8. \end{aligned}$$

(2) 由于  $M_{41} + M_{42} + M_{43} + 2M_{44} = -A_{41} + A_{42} - A_{43} + 2A_{44}$ , 因此用“ $-1, 1, -1, 2$ ”替代行列式  $A$  中的第 4 行构造一个新的行列式,

$$B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

而  $B_2$  由于 2, 4 行相同, 其值为 0. 故  $M_{41} + M_{42} + M_{43} + 2M_{44} = 0$ .

**例 1.18** 证明:  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$ .

**解** 将行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$  升阶, 构造新的行列式,

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 \end{vmatrix},$$

其为范德蒙德行列式, 两个行列式之间的关联是前者为后者中元素  $x^2$  的余子式(用  $M_{34}$



$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & & & b_3 \\ & \ddots & & \ddots \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & & & \ddots \\ c_3 & & & & & d_3 \end{vmatrix}_{2n-4} = \dots \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i).
\end{aligned}$$

## 1.4 习题精选

### 1. 填空题.

- (1) 排列 243156 的逆序数为\_\_\_\_\_.
- (2) 排列  $(n-1)(n-2)\cdots 21n$  的逆序数为\_\_\_\_\_.
- (3) 6 级排列  $j_1 j_2 j_3 j_4 j_5 j_6$  与  $j_6 j_5 j_4 j_3 j_2 j_1$  的逆序数之和为\_\_\_\_\_.
- (4) 若 9 级排列 1274*i*56*k*9 是奇排列, 则  $i = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $k = \underline{\hspace{1cm}}$ .
- (5) 在 5 阶行列式中, 元素乘积  $a_{21} a_{34} a_{15} a_{53} a_{42}$  前应带的符号为\_\_\_\_\_.
- (6) 多项式  $f(x) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix}$  中  $x$  的系数为\_\_\_\_\_, 常数项为\_\_\_\_\_.
- (7) 设行列式  $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1$ , 则  $D_1 = \begin{vmatrix} 4a_1 & 2a_1 - 3a_2 & a_3 \\ 4b_1 & 2b_1 - 3b_2 & b_3 \\ 4c_1 & 2c_1 - 3c_2 & c_3 \end{vmatrix}$  的值为\_\_\_\_\_.
- (8) 若行列式  $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$  的余子式  $M_{22} = 3$ , 则  $x = \underline{\hspace{1cm}}$ .
- (9) 3 阶行列式  $D$  中, 第 1 列元素分别为 1, -3, 2, 第 3 列元素的余子式依次是 2,  $a$ , -2, 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.
- (10) 若行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ , 则  $M_{21} + M_{22} + M_{23} = \underline{\hspace{1cm}}$ .

### 2. 单项选择题.

- (1) 下列元素乘积能成为 5 阶行列式  $|a_{ij}|_5$  中的一般项的是( ).
- (A)  $-a_{21} a_{34} a_{15} a_{53} a_{42}$ ; (B)  $a_{42} a_{34} a_{52} a_{15} a_{21}$ ;  
(C)  $a_{42} a_{34} a_{53} a_{15} a_{21}$ ; (D)  $a_{31} a_{14} a_{25} a_{52} a_{43}$ .
- (2) 行列式  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ x & -2 & 2 \\ -5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$  中, 元素  $x$  的代数余子式是( ).

$$(A) \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \quad (B) -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad (C) -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \quad (D) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

(3) 若 3 阶行列式  $D=0$ , 则下列结论正确的是( ).

- (A) 行列式  $D$  中有一行或列的元素全为零;  
 (B) 行列式  $D$  中的元素全为零;  
 (C) 行列式  $D$  中有两行或列的元素对应成比例;  
 (D) 上述选项不一定成立.

$$(4) \text{ 行列式 } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1, \text{ 则 } \begin{vmatrix} 4a_1 & -2b_1 & -8c_1 \\ -2a_2 & b_2 & 4c_2 \\ -2a_3 & b_3 & 4c_3 \end{vmatrix} = ( ).$$

- (A) 16; (B) -16; (C) 32; (D) -32.

(5) 关于行列式的性质下列表述不正确的是( ).

- (A) 行列式转置值不变;  
 (B) 某一行元素乘以一个数对应加到另外一行, 行列式值不变;  
 (C) 数乘行列式等于将数乘到行列式的每一个元素上;  
 (D) 行列式中两行元素互换, 行列式变号.

3. 计算下列行列式.

$$(1) D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 301 \\ 1 & 2 & 102 \\ 2 & 4 & 199 \end{vmatrix}; \quad (2) D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad (3) D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

$$4. \text{ 计算行列式 } D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

$$5. \text{ 计算行列式 } D_n = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \quad (a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0).$$

$$6. \text{ 计算行列式 } D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

7. 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & x & -x & -x \\ x & -x & x & -x \\ x & -x & -x & x \end{vmatrix}$ .

8. 计算  $n$  阶行列式  $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$  ( $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ ).

9. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix}$ .

10. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2+1 \end{vmatrix}$ .

11. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & a & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & a & a & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ .

12. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$  (其中  $a \neq b$ ).

13. 已知行列式  $D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$ , 求  $A_{41} + A_{43}$  及  $A_{42} + A_{44}$ .

14. 计算行列式  $D_4 = \begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2 b_1 & a_1 b_1^2 & b_1^3 \\ a_2^3 & a_2^2 b_2 & a_2 b_2^2 & b_2^3 \\ a_3^3 & a_3^2 b_3 & a_3 b_3^2 & b_3^3 \\ a_4^3 & a_4^2 b_4 & a_4 b_4^2 & b_4^3 \end{vmatrix}$ .

15. 若  $i_1 i_2 \cdots i_n$  为一个  $n$  级排列, 证明: 排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  与排列  $i_n i_{n-1} \cdots i_1$  的逆序数

之和为  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

16. 证明: 
$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

17. 行列式中的每行元素之和等于零, 证明: 行列式的值为零.

18. 若行列式  $D_n (n \geq 2)$  中所有的元素均为 1 或 -1, 证明: 行列式的值为偶数.

19. 证明奇数阶反对称行列式的值为零.

20. 设行列式  $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ , 证明:

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ a_1+x & b_1+y & c_1+z \\ a_2+x & b_2+y & c_2+z \end{vmatrix} = D + x \sum_{i=1}^3 A_{i1} + y \sum_{i=1}^3 A_{i2} + z \sum_{i=1}^3 A_{i3},$$

其中的  $A_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$  为  $D$  的代数余子式.

## 1.5 习题详解

1. 填空题.

(1) 4; 提示  $N(243156) = 0+0+1+3+0+0 = 4$ .

(2)  $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ ;

提示  $N((n-1)(n-2)\cdots 321n) = 0+1+\cdots+(n-2)+0 = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ .

(3) 15; 提示 由于本题为填空题, 可以使用特例进行求解, 例如取  $j_1j_2j_3j_4j_5j_6$  与  $j_6j_5j_4j_3j_2j_1$  分别为 123456 和 654321, 计算逆序数之和为 15, 更一般的方法见 1.4 节 15 题.

(4) 3, 8; 提示  $N(127435689) = 5$  为奇排列.

(5) 正号; 提示 由  $N(51423) = 0+1+1+2+2 = 6$ , 因此符号为正号.

(6) 2, 2;

提示 将行列式按第 2 列展开有

$$f(x) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

从而  $x$  的系数为  $- \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ , 常数项为  $- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$ .

(7)  $-12$ ;**提示**

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \begin{vmatrix} 4a_1 & 2a_1 - 3a_2 & a_3 \\ 4b_1 & 2b_1 - 3b_2 & b_3 \\ 4c_1 & 2c_1 - 3c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a_1 & 2a_1 - 3a_2 & a_3 \\ b_1 & 2b_1 - 3b_2 & b_3 \\ c_1 & 2c_1 - 3c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - 2c_1} 4 \begin{vmatrix} a_1 & -3a_2 & a_3 \\ b_1 & -3b_2 & b_3 \\ c_1 & -3c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
 &= (-3) \times 4 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -12.
 \end{aligned}$$

(8) 5; **提示** 由已知  $M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - x = 3$ , 有  $x = 5$ .

(9)  $\frac{2}{3}$ ; **提示** 行列式第3列元素的余子式依次是  $2, a, -2$ , 则第3列元素的代数余子式依次是  $2, -a, -2$ , 由行列式按行列展开的结论, 有  $1 \times 2 + (-3) \times (-a) + 2 \times (-2) = 0$ , 解得  $a = \frac{2}{3}$ .

(10) 16; **提示**  $M_{21} + M_{22} + M_{23} = -A_{21} + A_{22} - A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 16$ .

## 2. 单项选择题.

(1) C; (2) B; (3) D; (4) A; (5) C.

## 3. 计算下列行列式.

$$\begin{aligned}
 (1) & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 301 \\ 1 & 2 & 102 \\ 2 & 4 & 199 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - 100c_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} \\
 &= (-5)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -25.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 4r_1}} 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - 2c_3} 10 \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 10 \times (-4) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= 10 \times (-4) \times (-4) = 160.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_4 - r_3 \\ r_3 - r_2 \\ r_2 - r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 - r_2 \\ r_2 - r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第1列展开}} x \begin{vmatrix} x & y & & & & \\ & x & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & x & y & \\ & & & & & x \end{vmatrix} + \\
 & (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & & & & & \\ x & y & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & y & & \\ & & & & x & y \end{vmatrix} = xx^{n-1} + (-1)^{n+1} yy^{n-1} = x^n + (-1)^{n+1} y^n.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad & \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} c_1 - \frac{1}{a_1}c_2 \\ c_1 - \frac{1}{a_2}c_3 \\ \cdots \\ c_1 - \frac{1}{a_n}c_{n+1} \end{matrix}} \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \left( a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \prod_{i=1}^n a_i.$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad & \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3+r_2 \\ \cdots \\ r_{n+1}+r_n \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad & D \xrightarrow{\begin{matrix} c_1+c_2 \\ c_3+c_4 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 2x & x & 2x & x \\ 2x & x & -2x & -x \\ 0 & -x & 0 & -x \\ 0 & -x & 0 & x \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} 2x & 2x & x & x \\ 2x & -2x & x & -x \\ 0 & 0 & -x & -x \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix} \\
 & = - \begin{vmatrix} 2x & 2x \\ 2x & -2x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -x & -x \\ -x & x \end{vmatrix} = 8x^2 \cdot (-2x^2) = -16x^4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}_{n+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ \dots \\ r_{n+1} - r_1 \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{array} \right|_{n+1} \\
& \begin{array}{c} c_1 + \frac{1}{a_1}c_2 \\ c_1 + \frac{1}{a_2}c_3 \\ \dots \\ c_1 + \frac{1}{a_n}c_{n+1} \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{array} \right|_{n+1} \\
& = \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \prod_{i=1}^n a_i.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. & \left| \begin{array}{cccc} a_1 + 1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + 1 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n + 1 \end{array} \right| \xrightarrow{c_1 + c_2 + \dots + c_n} \left| \begin{array}{cccc} 1 + \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & \dots & a_n \\ 1 + \sum_{i=1}^n a_i & a_2 + 1 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & \dots & a_n + 1 \end{array} \right| \\
& = \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i\right) \left| \begin{array}{cccc} 1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 + 1 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & \dots & a_n + 1 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{c} c_2 - a_2c_1 \\ c_3 - a_3c_1 \\ \dots \\ c_n - a_nc_1 \end{array}} \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i\right) \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right| \\
& = \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. & \left| \begin{array}{cccc} a_1^2 + 1 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 + 1 & \dots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n^2 + 1 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{升阶}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_1^2 + 1 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ a_2 & a_2 a_1 & a_2^2 + 1 & \dots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n^2 + 1 \end{array} \right|_{n+1} \\
& \begin{array}{c} c_2 - a_1c_1 \\ c_3 - a_2c_1 \\ \dots \\ c_{n+1} - a_nc_1 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 1 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right|_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} c_1 - a_1 c_2 \\ c_1 - a_2 c_3 \\ \cdots \\ c_1 - a_n c_{n+1} \end{array} \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

$$11. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & a & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & a & a & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} r_1 - r_2 \\ r_2 - r_3 \\ \cdots \\ r_{n-1} - r_n \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{按第 1 列展开} \\ \hline \end{array} (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\begin{array}{c} r_1 - r_2 \\ r_2 - r_3 \\ \cdots \\ r_{n-2} - r_{n-1} \end{array} (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+1} a^{n-2}.$$

$$12. D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{按第 1 列分解} \\ \hline \end{array} \begin{vmatrix} a & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{前行列式} \\ c_i - bc_{i-1} \\ \hline \text{后行列式展开} \end{array} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= a^n + bD_{n-1},$$

从而有  $D_n = a^n + bD_{n-1}$ , 类似地

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{按第1列分解} \\ \hline \end{array} \begin{vmatrix} b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{前行列式} \\ c_i - ac_{i-1} \\ \hline \text{后行列式展开} \\ \hline \end{array} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= b^n + aD_{n-1},$$

得到  $D_n = b^n + aD_{n-1}$ , 从而有

$$\begin{cases} D_n = a^n + bD_{n-1} \\ D_n = b^n + aD_{n-1} \end{cases},$$

因此  $aD_n = a^{n+1} + abD_{n-1}$ ,  $bD_n = b^{n+1} + abD_{n-1}$ , 故  $(a-b)D_n = a^{n+1} - b^{n+1}$ , 解得

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

13. 由行列式按行展开的性质及推论有

$$\begin{cases} 1A_{41} + 2A_{42} + 1A_{43} + 2A_{44} = D_4 = -6 \\ 2A_{41} + 3A_{42} + 2A_{43} + 3A_{44} = 0 \end{cases},$$

从而可解得

$$\begin{cases} A_{41} + A_{43} = 18 \\ A_{42} + A_{44} = -12 \end{cases}.$$

$$14. \begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2 b_1 & a_1 b_1^2 & b_1^3 \\ a_2^3 & a_2^2 b_2 & a_2 b_2^2 & b_2^3 \\ a_3^3 & a_3^2 b_3 & a_3 b_3^2 & b_3^3 \\ a_4^3 & a_4^2 b_4 & a_4 b_4^2 & b_4^3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{每行提取公因式}} a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_1^2}{a_1^2} & \frac{b_1^3}{a_1^3} \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_2^2}{a_2^2} & \frac{b_2^3}{a_2^3} \\ 1 & \frac{b_3}{a_3} & \frac{b_3^2}{a_3^2} & \frac{b_3^3}{a_3^3} \\ 1 & \frac{b_4}{a_4} & \frac{b_4^2}{a_4^2} & \frac{b_4^3}{a_4^3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\text{范德蒙德行列式}}{a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3} \left( \frac{b_4 - b_3}{a_4 - a_3} \right) \left( \frac{b_4 - b_2}{a_4 - a_2} \right) \left( \frac{b_4 - b_1}{a_4 - a_1} \right) \left( \frac{b_3 - b_2}{a_3 - a_2} \right) \left( \frac{b_3 - b_1}{a_3 - a_1} \right) \left( \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} \right) \\ & = (a_3 b_4 - a_4 b_3)(a_2 b_4 - a_4 b_2)(a_1 b_4 - a_4 b_1)(a_2 b_3 - a_3 b_2)(a_1 b_3 - a_3 b_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned}$$

15. 排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  中必含有 1, 若 1 在排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  中的逆序个数为  $s$ , 则其在排列  $i_n i_{n-1} \cdots i_1$  中的逆序个数为  $n-s-1$ , 从而 1 在排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  与  $i_n i_{n-1} \cdots i_1$  的逆序个数和为  $n-1$ , 类似地, 2 在排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  与  $i_n i_{n-1} \cdots i_1$  的逆序个数和为  $n-2$ , 以此类推,  $n$  在排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  与  $i_n i_{n-1} \cdots i_1$  的逆序个数和为 0, 所以  $i_1 i_2 \cdots i_n$  与  $i_n i_{n-1} \cdots i_1$  的逆序个数之和为  $1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ .

$$\begin{aligned} 16. \text{左} &= \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} 2(b+c+a) & c+a & a+b \\ 2(b_1+c_1+a_1) & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ 2(b_2+c_2+a_2) & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} b+c+a & c+a & a+b \\ b_1+c_1+a_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2+a_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_2-c_1 \\ c_3-c_1}} 2 \begin{vmatrix} b+c+a & -b & -c \\ b_1+c_1+a_1 & -b_1 & -c_1 \\ b_2+c_2+a_2 & -b_2 & -c_2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{c_1+c_2+c_3}{2} \begin{vmatrix} a & -b & -c \\ a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & -b_2 & -c_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \text{右}. \end{aligned}$$

$$17. \text{设行列式 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ 且满足 } \sum_{j=1}^n a_{ij} = 0, i = 1 \cdots n, \text{ 则}$$

$$D \xrightarrow{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

故命题成立.

18. 由行列式的定义

$$D_n = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} (-1)^{N(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

$D_n$  ( $n \geq 2$ ) 表示偶数个 1 或 -1 的和; 若 1 的个数为奇数, 则 -1 也为奇数, 则和为偶数; 若 1 的个数为偶数, 则 -1 也为偶数, 从而和也为偶数, 所以命题成立.

19. 设反对称行列式  $D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ , 其中的  $n$  为奇数, 则

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{每行提}(-1)} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n D^T = -D^T,$$

再由  $D = D^T$ , 故  $D = 0$ .

20. 由行列式的性质有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ a_1+x & b_1+y & c_1+z \\ a_2+x & b_2+y & c_2+z \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b & c \\ x & b_1 & c_1 \\ x & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y & c \\ a_1 & y & c_1 \\ a_2 & y & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & z \\ a_1 & b_1 & z \\ a_2 & b_2 & z \end{vmatrix} \\ &= D + x \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} a & 1 & c \\ a_1 & 1 & c_1 \\ a_2 & 1 & c_2 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= D + x \sum_{i=1}^3 A_{i1} + y \sum_{i=1}^3 A_{i2} + z \sum_{i=1}^3 A_{i3}. \end{aligned}$$

## 1.6 拓展训练

1. 行列式  $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 多项式  $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$  中  $x^3$  项的系数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 设矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & b & 3 \\ a & \frac{b}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 若  $|\mathbf{A}| = -\frac{1}{2}$ , 且  $-M_{21} + M_{22} - M_{23} = 0$ ,

则( ).

(A)  $a=0$  或  $a=-\frac{3}{2}$ ;

(B)  $a=0$  或  $a=\frac{3}{2}$ ;

(C)  $b=1$  或  $b=-\frac{1}{2}$ ;

(D)  $b=-1$  或  $b=\frac{1}{2}$ .



1.6.1 详解



1.6.2 详解



1.6.3 详解