第一部分

同步练习

第1章

概率论的基本概念

1.1　内容提要

1.1.1　随机试验与随机事件

自然界中的各种现象大体上可以分为两类，即确定性现象和不确定性现象. 确定性现象是在一定条件下必然会发生的现象；作为不确定性现象中的一部分，随机现象是指在相同条件下，试验的结果呈现出不确定性，但在大量的重复试验中结果又具有统计规律性(即在大量重复试验或观测中呈现出来的固有规律)的现象. 概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律的一门学科. 我们认识统计规律的手段是随机试验，所谓的随机试验是具有以下性质的试验：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验可能出现的结果不止一个，且在试验之前知道所有可能的结果；

(3) 试验前不能确定具体哪一个结果会出现.

通常用字母 E 表示随机试验(以后简称试验).

随机试验的全部可能结果组成的集合称为随机试验的样本空间，记为 S，S 中的元素，即 E 的每个试验结果，称为样本点，记为 e. 一般地，试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件，简称事件，用大写的英文字母 A，B，C 等表示，由一个样本点构成的单点集，称为基本事件，否则称为复杂事件.

若试验的结果为事件 A 中的样本点，称在这次试验中事件 A 发生. 由于样本空间 S 包含了所有的可能结果，每次试验 S 总是发生的，因此 S 称为必然事件，而空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，每次试验 $\varnothing$ 都不发生，因此 $\varnothing$ 称为不可能事件.

1.1.2　事件的关系与运算

1. 事件的运算

A 与 B 的和事件 $A\cup B=\{e\,|\,e\in A$ 或 $e\in B\}$，$A\cup B$ 发生当且仅当 A 与 B 至少有一

个发生. n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

A 与 B 的积事件 $A \cap B=\{e \mid e \in A$ 且 $e \in B\}$，简记为 AB，$A \cap B$ 发生当且仅当 A 与 B 同时发生. n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

A 与 B 的差事件 $A-B=\{e \mid e \in A$ 且 $e \notin B\}$，$A-B$ 发生当且仅当事件 A 发生而事件 B 不发生.

2. 事件的关系

若 $A \subset B$，则称事件 B 包含事件 A，此时事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

若 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互不相容或互斥，此时事件 A 与 B 不能同时发生. 基本事件是两两互不相容的.

若 $A \cup B=S$ 且 $A \cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互为对立事件或互逆事件，A 的对立事件记为 $\bar{A}$. 显然对随机试验而言，每次试验事件 A 与 $\bar{A}$ 中必有且仅有一个发生.

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n=S$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 S 的一个划分(分割).

3. 运算规律

(1) 交换律：$A \cup B=B \cup A$；$A \cap B=B \cap A$；

(2) 结合律：$A \cup(B \cup C)=(A \cup B) \cup C$；$A \cap(B \cap C)=(A \cap B) \cap C$；

(3) 分配率：$(A \cup B) C=(A C) \cup(B C)$；$(A B) \cup C=(A \cup C) \cap(B \cup C)$；

(4) 德摩根律：$\overline{A \cup B}=\bar{A} \cap \bar{B}$；$\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k$；$\overline{A \cap B}=\bar{A} \cup \bar{B}$；$\overline{\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k$.

注　由事件的运算可知：$A-B=A-AB=A\bar{B}$；$(A\bar{B}) \cup(AB)=A$.

1.1.3　频率的定义及性质

设 A 为试验 E 中一个事件，试验 E 在相同条件下重复进行 n 次，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，$\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 在 n 次试验中发生的频率，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

频率的性质

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 为 m 个两两互不相容的事件，则有

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_m).$$

1.1.4　概率的公理化定义及性质

设 E 是一个随机试验，S 是样本空间，对 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记作 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$满足以下 3 个条件：

（1）非负性：对任意的事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

（2）规范性：对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；

（3）可列可加性：对于两两互不相容的事件 A_1，A_2，…，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

概率的性质

（1）$P(\varnothing)=0$；

（2）设 A_1，A_2，…，A_n 为 n 个两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

（3）若 $A\subset B$，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(A)\leqslant P(B)$；

（4）对任一事件 A，有 $P(A)\leqslant 1$；

（5）对任一事件 A，有 $P(A)=1-P(\bar{A})$或 $P(\bar{A})=1-P(A)$；

（6）对任意两个事件 A，B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

对任意 3 个事件 A，B，C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

1.1.5　条件概率的定义及性质

设 A，B 为两个事件，且 $P(A)>0$，则称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

条件概率的性质

（1）非负性：对任意的事件 B，有 $P(B|A)\geqslant 0$.

（2）规范性：对于必然事件 S，有 $P(S|A)=1$.

（3）可列可加性：对于两两互不相容的事件 B_1，B_2，…，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\mid A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i\mid A).$$

（4）乘法公式：若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(B|A)P(A)$.

推论　设 A，B，C 为 3 个事件，且 $P(AB)>0$，则

$$P(ABC)=P(C\mid AB)P(B\mid A)P(A).$$

（5）全概率公式：设 S 为试验 E 的样本空间，A 为 E 的一个事件，B_1，B_2，…，B_n 为 S 的一个划分，且有 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

推论 设 S 为试验 E 的样本空间，A 为 E 的一个事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两互不相容，且有 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^{n} B_i \supset A$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i).$$

(6) **贝叶斯公式**：设 S 为试验 E 的样本空间，A 为 E 的一个事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，$P(A)>0$，$P(B_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

1.1.6 事件的独立性

1. 两个事件相互独立的定义

设 A，B 是两个事件，如果满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称事件 A 与 B **相互独立**，简称 A 与 B **独立**.

2. 两个事件相互独立的性质

(1) 若 $P(A)>0$，则事件 A 与事件 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A)=P(B)$.

(2) 若 A 与 B 独立，则 A 与 $\overline{B}$ 独立，$\overline{A}$ 与 B 独立，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立.

注 当 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 时，“A 与 B 相互独立”与“A 与 B 互不相容”不能同时成立.

3. 三个事件相互独立的定义

如果事件 A，B，C 满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(CA)=P(C)P(A),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称 A，B，C **相互独立**.

4. 三个事件相互独立的性质

(1) 若 A，B，C 相互独立，将其中任意 i 个$(i=1,2,3)$换成其对立事件，得到的三个事件仍然相互独立.

(2) 若 A，B，C 相互独立，则 $A\cup B$，AB，$A-B$ 均与 C 相互独立.

一般地，如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 对于其中任意 $i\ (i=2,3,\cdots,n)$个事件都满足积事件的概率等于各事件概率相乘，则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **相互独立**. 将 A_1，

A_2，…，A_n 中任意多个事件换成它们的对立事件，得到的 n 个事件仍然相互独立.

1.1.7　概率模型

概率模型描述了一类随机试验的特点，并给出事件概率的计算公式.

1. 古典概型(等可能概型)

古典概型满足：样本空间中的样本点有限，并且基本事件均等可能发生. 设样本空间 S 中的样本点总数为 n，事件 A 中包含的样本点数为 n_A，则

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{ 中的样本点数}}{S\text{ 中的样本点数}}.$$

2. 几何概型

设样本空间可几何化为一个测度(如长度、面积、体积等)有限的区域(如长度有限的线段，面积有限的区域等)，事件 A 可几何化为区域的子集，且事件 A 发生的可能性大小与 A 的测度成正比. 记样本空间 S 的测度为 $L(S)$，事件 A 的测度为 $L(A)$，则

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}.$$

这个概率模型称为几何概型.

3. 伯努利概型

如果试验 E 只有两个结果 A 与 $\bar{A}$，则称 E 为伯努利试验，将试验 E 在相同条件下独立地重复进行 n 次所构成的试验称为 n 重伯努利试验. 设 $P(A)=p$，$P(\bar{A})=1-p(0<p<1)$，将 n 重伯努利试验中事件 A 发生 k 次的概率记为 $P_n(k)$，则

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

这个概率模型称为伯努利概型.

1.2　典型例题分析

1.2.1　题型一　事件的运算及事件的概率

本题型要求：正确理解事件的关系并能通过事件的运算表达复杂事件；熟练掌握概率的性质及应用性质的常见技巧求解事件的概率.

例 1.1　设 A，B，C 为 3 个事件，用 A，B，C 的运算关系表示下列各事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生；

(2) A 与 B 都发生，而 C 不发生；

(3) A，B，C 中至少有一个发生；

(4) A，B，C 都不发生；

(5) A，B，C 中不多于两个发生；

(6) A，B，C 中至少有两个发生.

解 (1)$A\overline{B}\overline{C}$；(2) $AB\overline{C}$；(3) $A\cup B\cup C$；(4) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；(5) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；(6) $(AB)\cup(AC)\cup(BC)$.

例 1.2 设 A，B，C 为三个事件，且满足

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/4,\quad P(AB)=P(BC)=0,\quad P(AC)=1/8,$$

求 A，B，C 中至少有一个发生的概率.

解 由于 $ABC\subset AB$，有

$$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0,$$

可得 $P(ABC)=0$，故

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

例 1.3 设 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{5}$，$P(AB)=\frac{1}{10}$，$P(AC)=\frac{1}{15}$，$P(BC)=\frac{1}{20}$，$P(ABC)=\frac{1}{30}$，求事件 $A\cup B\cup C$，$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，$\overline{A}\overline{B}C$，$(\overline{A}\overline{B})\cup C$ 发生的概率.

解
$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{17}{20},\end{aligned}$$

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{20},$$

由于 $\overline{A}\overline{B}=(\overline{A}\overline{B}C)\cup(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$，且 $\overline{A}\overline{B}C$ 与 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 互不相容，从而有

$$P(\overline{A}\overline{B}C)=P(\overline{A}\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=\frac{4}{15}-\frac{3}{20}=\frac{7}{60},$$

$$P((\overline{A}\overline{B})\cup C)=P(\overline{A}\overline{B})+P(C)-P(\overline{A}\overline{B}C)=\frac{4}{15}+\frac{1}{5}-\frac{7}{60}=\frac{7}{20}.$$

例 1.4 设 $P(A\cup B)=0.6$，且 $P(\overline{A}B)=0.3$，求 $P(\overline{A})$.

解 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(\overline{A}B)$，有

$$P(A)=P(A\cup B)-P(\overline{A}B)=0.6-0.3=0.3,$$

故

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.7.$$

例 1.5 证明$[(A\cup B)(A\cup\overline{B})]\cup[(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})]=S$，其中 S 为样本空间.

证 由分配律有

$$\begin{aligned}&[(A\cup B)(A\cup\overline{B})]\cup[(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})]\\=&[A\cup(B\overline{B})]\cup[\overline{A}\cup(B\overline{B})]=(A\cup\varnothing)\cup(\overline{A}\cup\varnothing)=A\cup\overline{A}=S.\end{aligned}$$

例 1.6 证明$\overline{(AB)\cup(CD)}=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{C}\cup\overline{D})$.

证 由德摩根律有

$$\overline{(AB)\cup(CD)}=\overline{AB}\cap\overline{CD}=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{C}\cup\overline{D}).$$

例 1.7　证明 $A-BC=(A-B)\cup(A-C)$.

证　$(A-B)\cup(A-C)=(A\overline{B})\cup(A\overline{C})=A(\overline{B}\cup\overline{C})=A\overline{BC}=A-BC$.

例 1.8　设 A 与 B 为对立事件，证明 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也为对立事件.

证　由 A 与 B 为对立事件，有 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$，从而 $\overline{AB}=S$ 且 $\overline{A\cup B}=\varnothing$，从而有 $\overline{A}\cup\overline{B}=S$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$，故 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为对立事件.

例 1.9　设 A，B 为任意两个事件，则(　　).

(A) $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$；　　(B) $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$；

(C) $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$；　　(D) $P(AB)\geqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

解　由于 $AB\subset A$，$AB\subset B$，有 $P(AB)\leqslant P(A)$，$P(AB)\leqslant P(B)$，从而有

$$[P(AB)]^2\leqslant P(A)P(B),\quad P(AB)\leqslant\sqrt{P(A)P(B)}\leqslant\frac{P(A)+P(B)}{2},$$

故选(C).

1.2.2　题型二　古典概型、几何概型的计算

在古典概型的计算中，要注意分析试验的全部基本事件是什么，以及要计算概率的事件中含有哪些基本事件；几何概型常与高等数学的知识相结合.

例 1.10　袋中有 5 只球，其中只有 1 只红球，现从袋中取球，每次取 1 只球，取出后不放回. (1)求前 3 次取到的球中有红球的概率；(2)求第 3 次取到的球是红球的概率.

解　(1) 对袋子中的球进行编号，考虑取出 3 只球的所有可能情况，样本空间 S 中的样本点数为 A_5^3(排列数)，设 $A=\{$前 3 次取到的球中有红球$\}$，则 A 中的样本点数为 $3C_4^1C_3^1$，由古典概型有

$$P(A)=\frac{3C_4^1C_3^1}{A_5^3}=\frac{3}{5}.$$

(2) 设 $B=\{$第 3 次取到的球是红球$\}$，则 B 中的样本点数为 $C_4^1C_3^1$，由古典概型有

$$P(B)=\frac{C_4^1C_3^1}{A_5^3}=\frac{1}{5}.$$

注　本题中(1)的计算也可以在压缩的样本空间上进行，S 中的样本点数为 C_5^3(组合数)，A 中的样本点数为 C_4^2，由古典概型有

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}.$$

但(2)的计算不能在压缩的样本空间上进行，因为若使用 C_5^3(组合数)计算 S 中的样本点数，则 B 不是 S 子集，即 B 不是事件.

例 1.11　墙上挂着 5 张字母卡片，其顺序为“abcba”，现掉落了两个，捡起后随机地挂回，求顺序仍然为“abcba”的概率.

解　由于卡片可能掉落的情况有 C_5^2 种，则随机挂回的情况即样本空间中的点数为

$2C_5^2$，显然其中有一半的挂回方式是正确的(顺序仍然为“abcba”)，再注意到当两个 a 或两个 b 同时掉落时，不论怎么挂回都能使得顺序为“abcba”，故令 $A=\{$顺序仍然为“abcba”$\}$，则 A 中的点数为 C_5^2+2，由古典概型有

$$P(A)=\frac{C_5^2+2}{2C_5^2}=\frac{3}{5}.$$

例 1.12 一批产品共有 50 件，其中含有 3 件次品。现对产品进行不放回抽样检查，若被抽查到的 5 件产品中至少有一件是次品，则认为这批产品不合格，求这批产品不合格的概率.

解 对产品按次品与非次品分别编号，则样本空间中样本点总数为 C_{50}^5，取到的 5 件产品中没有次品的样本点数为 C_{47}^5，设 $A=\{$这批产品不合格$\}$，则

$$P(A)=\frac{C_{50}^5-C_{47}^5}{C_{50}^5}=1-\frac{C_{47}^5}{C_{50}^5}\approx 0.276.$$

注 计算复杂事件中的样本点数，可利用样本空间中的样本点数减去其对立事件中的样本点数，这种方法在计算含“至少”这样的事件点数时常常很方便.

例 1.13 袋中有 10 只球，其中 4 只白球、6 只红球，从中任取 3 只，求这 3 只球中至少有一只白球的概率.

解 按球的颜色对球分别进行编号，取到 3 只球作为一个试验结果，从而样本空间中样本点总数为 C_{10}^3. 设 $A=\{$取到的 3 只球中至少有一只白球$\}$，则 $\overline{A}=\{$取到的 3 只球中都是红球$\}$，而 $\overline{A}$ 中包含的点数为 C_6^3，故

$$P(A)=\frac{C_{10}^3-C_6^3}{C_{10}^3}=1-\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{6}.$$

例 1.14 在区间$[0,1]$上任取两个数，求两数之和小于$\frac{3}{2}$的概率，两数之和等于$\frac{3}{2}$的概率.

解 用 x，y 分别表示取得的两个数，则样本空间为

$$S=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1\},$$

令 $A=\left\{两数之和小于\frac{3}{2}\right\}$，$B=\left\{两数之和等于\frac{3}{2}\right\}$，

则有

$$A=\left\{(x,y)\mid x+y<\frac{3}{2},\quad (x,y)\in S\right\},$$

$$B=\left\{(x,y)\mid x+y=\frac{3}{2},\quad (x,y)\in S\right\},$$

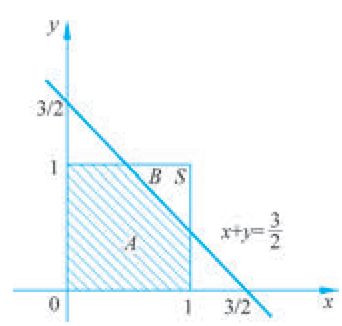

图 1.1

如图 1.1 将 S，A，B 几何化后，由几何概型有

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{7}{8},\quad P(B)=\frac{L(B)}{L(S)}=0,$$

其中 $L(A)$，$L(B)$与 $L(S)$分别表示区域 A，B 与 S 的面积.

注 由几何概型可以看到，并不是只有不可能事件$\varnothing$的概率才为零.

例 1.15　设 A，B 为两个事件，且 $0<P(B)<1$，若 $P(A|B)=1$，则 A 与 B 的关系可能是(　　).

(A) $A=B$；　　(B) $A\supset B$；

(C) $A\subset B$；　　(D) (A)，(B)，(C)均有可能.

解　若 $A=B$ 或 $A\supset B$，有 $AB=B$，从而

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1,$$

若 $A\subset B$，也有可能使得 $P(A|B)=1$，如在例 1.14 中令 $A=\left\{两数之和小于\frac{3}{2}\right\}$，$B=\left\{两数之和不大于\frac{3}{2}\right\}$，显然 $A\subset B$，由几何概型可知

$$P(B)=\frac{L(B)}{L(S)}=\frac{7}{8},$$

从而有

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=1,$$

故此题选(D).

1.2.3　题型三　条件概率问题

关于条件概率有如下几个方面的问题需要注意：①在计算或证明中一般可以将条件概率问题转化为无条件概率问题进行；②与实际问题相结合时应注意区分条件概率与积事件的概率；③若试验可以分解为多个步骤，可用乘法公式计算积事件概率；④样本空间中样本点若有不同属性，这时计算常与全概率公式、贝叶斯公式的计算有关.

例 1.16　已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，求 $P(A\cup B)$.

解　由已知

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3},\quad P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2},$$

有

$$P(AB)=\frac{1}{3}P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12},\quad P(B)=2P(AB)=2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$$

例 1.17　$P(\bar{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\bar{B})=0.5$，求条件概率 $P(B|(A\cup\bar{B}))$.

解　由 $P(\bar{A})=0.3$，有 $P(A)=1-P(\bar{A})=0.7$，再由 $P(A\bar{B})=0.5$，有

$$P(AB)=P(A)-P(A\bar{B})=0.7-0.5=0.2,$$

从而

$$\begin{aligned}P(B\mid(A\cup\bar{B}))&=\frac{P(B(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{P((BA)\cup(B\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{P(BA)}{P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})}\\&=\frac{P(BA)}{P(AB)+P(\bar{B})}=\frac{P(BA)}{P(AB)+1-P(B)}=\frac{0.2}{0.2+1-0.4}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

例 1.18 若 $P(A|B)=1$，证明 $P(\bar{B}|\bar{A})=1$.

证 由 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$，有 $P(B)=P(AB)$，从而

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A),$$

故

$$P(\bar{B}\mid\bar{A})=\frac{P(\bar{B}\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=\frac{1-P(A)}{1-P(A)}=1.$$

例 1.19 设有 N 件产品，其中包括 $n(N\geqslant n)$件次品，现从中任取 2 件，求

(1) 取出的两件产品中有一件是次品的条件下，另一件也是次品的概率；

(2) 取出的两件产品中有一件不是次品的条件下，另一件是次品的概率；

(3) 取出的两件产品中至少有一件是次品的概率.

解 (1) 令 $A=\{$取出的两件产品中有一件是次品$\}$，$B=\{$另一件是次品$\}$，则 $AB=\{$取出的两件产品都是次品$\}$，从而

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\dfrac{C_n^2}{C_N^2}}{\dfrac{C_{N-n}^1C_n^1+C_n^2}{C_N^2}}=\frac{C_n^2}{C_{N-n}^1C_n^1+C_n^2}.$$

(2) 令 $C=\{$取出的两件产品中有一件不是次品$\}$，则 $CB=\{$取出的两件产品中有一件是次品，另一件是非次品$\}$，从而

$$P(B\mid C)=\frac{P(CB)}{P(C)}=\frac{\dfrac{C_{N-n}^1C_n^1}{C_N^2}}{\dfrac{C_{N-n}^1C_n^1+C_{N-n}^2}{C_N^2}}=\frac{C_{N-n}^1C_n^1}{C_{N-n}^1C_n^1+C_{N-n}^2}.$$

(3) 令 $D=\{$取出的两件产品中至少有一件是次品$\}$，则 $\bar{D}=\{$取出的两件产品均为非次品$\}$，从而

$$P(D)=1-P(\bar{D})=1-\frac{C_{N-n}^2}{C_N^2}.$$

例 1.20 袋中装有 n 只红球，m 只白球，每次从袋中任取 1 只球，观察颜色后将其放回，并再放入 a 只与所取的那只球同颜色的球，现连续进行 3 次，试求前两次取到白球并且第三次取到红球的概率.

解 设 $A=\{$第一次取到白球$\}$，$B=\{$第二次取到白球$\}$，$C=\{$第三次取到红球$\}$，则按试验的先后顺序，应用乘法公式有

$$P(ABC)=P(C\mid AB)P(B\mid A)P(A)=\frac{C_n^1}{C_{n+m+2a}^1}\,\frac{C_{m+a}^1}{C_{n+m+a}^1}\,\frac{C_m^1}{C_{n+m}^1}.$$

例 1.21 现有两个箱子，第一个箱子装有 10 只球，其中 8 只为白色，第二个箱子装有 20 只球，其中 4 只为白色，现从每个箱子任取一球，然后再从这两只球中任取一只，求取到球为白色的概率.

解　设 $A=\{$取到的球为白色$\}$，$B_1=\{$取到的球来自第一个箱子$\}$，$B_2=\{$取到的球来自第二个箱子$\}$，由古典概型有

$$P(A\mid B_1)=\frac{C_8^1}{C_{10}^1},\quad P(A\mid B_2)=\frac{C_4^1}{C_{20}^1},$$

再由已知有 $P(B_1)=P(B_2)=\dfrac{1}{2}$，从而根据全概率公式有

$$P(A)=P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{C_8^1}{C_{10}^1}+\frac{C_4^1}{C_{20}^1}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 1.22　已知仓库中存放的某种元件是由编号为 1，2，3 的 3 个工厂提供的，提供的份额分别是 15%、80%、5%，又知 3 个工厂生产产品的次品率分别是 0.02、0.01、0.03，现从仓库中随机取出一只元件，经检验取到的是次品，求该产品是由第 2 个厂家生产的概率.

解　设 $A=\{$取到的产品是次品$\}$，$B_i=\{$取到的产品是由第 i 个厂家生产的$\}$，$i=1,2,3$，由已知有

$$P(B_1)=15\%,\quad P(B_2)=80\%,\quad P(B_3)=5\%,\quad P(A\mid B_1)=0.02,$$
$$P(A\mid B_2)=0.01,\quad P(A\mid B_3)=0.03,$$

故

$$P(B_2\mid A)=\frac{P(A\mid B_2)P(B_2)}{\sum\limits_{i=1}^{3}P(A\mid B_i)P(B_i)}=\frac{0.01\times 0.8}{0.02\times 0.15+0.01\times 0.8+0.03\times 0.05}=\frac{8}{53}.$$

1.2.4　题型四　独立性与伯努利概型

在本题型中需要注意事件相互独立与事件互不相容的区别，事件组相互独立与事件组中事件两两相互独立的区别，独立重复试验序列与伯努利概型的关系，等等.

例 1.23　设事件 A,B,C 两两相互独立，并且 $ABC=\varnothing$，$P(A)=P(B)=P(C)<\dfrac{1}{2}$，$P(A\cup B\cup C)=\dfrac{9}{16}$，求事件 A 的概率.

解　由题意有

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)\\&=3P(A)-3[P(A)]^2=\frac{9}{16},\end{aligned}$$

解得 $P(A)=\dfrac{1}{4}$ 或 $P(A)=\dfrac{3}{4}$（舍）.

例 1.24　设事件 A,B 相互独立，已知仅有 A 发生的概率为 $\dfrac{1}{4}$，仅有 B 发生的概率为 $\dfrac{1}{4}$，求 $P(A)$ 和 $P(B)$.

解 依题意，$P(A\bar{B})=\dfrac{1}{4}=P(\bar{A}B)$，从而有

$$P(A)=P(A\bar{B})+P(AB)=P(\bar{A}B)+P(AB)=P(B),$$

再由 A，B 相互独立，可知 A，$\bar{B}$ 也相互独立，于是

$$P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=P(A)[1-P(B)]=P(A)[1-P(A)]=\frac{1}{4},$$

解得 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$.

例 1.25 将一枚均匀硬币独立地掷两次，令 $A_1=\{$第一次出现正面$\}$，$A_2=\{$第二次出现正面$\}$，$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$，$A_4=\{$正面出现两次$\}$，则(　　).

(A) A_1，A_2，A_3 相互独立；　　(B) A_2，A_3，A_4 相互独立；

(C) A_1，A_2，A_3 两两独立；　　(D) A_2，A_3，A_4 两两独立.

解 由题意有

$$P(A_1)=\frac{1}{2},\quad P(A_2)=\frac{1}{2},\quad P(A_3)=\frac{1}{2},\quad P(A_4)=\frac{1}{4},$$

$$P(A_1A_2)=\frac{1}{4},\quad P(A_1A_3)=\frac{1}{4},\quad P(A_2A_3)=\frac{1}{4},$$

$$P(A_2A_4)=\frac{1}{4},\quad P(A_1A_2A_3)=0,$$

从而有

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2),\quad P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3),$$

$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3),\quad P(A_1A_2A_3)\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

$$P(A_2A_4)\neq P(A_2)P(A_4),$$

故选(C).

例 1.26 对产品进行放回式抽样检查，若抽取的 200 件产品中有 4 件是次品，问能否由此认为该厂生产产品的次品率不超过 0.005.

解 若产品的次品率为 0.005，则由伯努利概型，200 次抽样中取到 k 件次品的概率为

$$P_{200}(k)=C_{200}^{k}0.005^{k}(1-0.005)^{200-k},\quad k=0,1,2,\cdots,200,$$

从而

$$\begin{aligned}P(k\geqslant 4)&=1-P(k<4)=1-\sum_{k=0}^{3}P_{200}(k)\\&=1-\sum_{k=0}^{3}C_{200}^{k}0.005^{k}(1-0.005)^{200-k}\approx 0.019,\end{aligned}$$

由小概率事件原理，不能认为产品的次品率不超过 0.005.

例 1.27 袋中装有大小相同的白球 3 只，黑球若干只，放回式地摸球 3 次，若至少摸到 2 只白球的概率为 7/27，求袋中黑球的个数.

解　设摸到白球的概率为 p，由伯努利概型可知，3 次摸到的球中恰有 k 只白球的概率为

$$P_3(k)=C_3^k p^k(1-p)^{3-k},\quad k=0,1,2,3,$$

因此

$$P\{\text{至少摸到 2 只白球}\}=P_3(2)+P_3(3)=C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3=3p^2-2p^3=\frac{7}{27},$$

解得 $p=\dfrac{1}{3}$，由古典概型可知袋中黑球的个数是 6 个.

1.3　习题精选

1. 填空题.

(1) 设 A，B，C 为 3 个事件，则 A，B，C 中至多有一个发生可以表示为________.

(2) 设 A，B 为两事件，且 $P(A)=a$，$P(B)=b$，$P(AB)=c$，则 $P(\overline{A}\overline{B})=$________.

(3) 从编号为 1，2，3，4，5 的 5 张卡片中随机抽取出 3 张，最小编号是 2 的概率等于________.

(4) 现有边长为 1 的正方体无盖容器，内部装有 1/4 的液体，若侧面或底面随机地出现一个漏洞，最后液体漏光的概率是________.

(5) 设事件 A，B 相互独立，且 $P(A)=0.3$，$P(A\cup B)=0.5$，则 $P(B)=$________.

(6) 设 10 件产品中有 4 件不合格品，现从中任取两件，已知两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为________.

(7) 袋中装有大小相同的白球 3 只，黑球若干只，放回式摸球 3 次，若至少摸到一只白球的概率为 19/27，则袋中黑球的个数为________.

(8) 已知 3 个射手击中目标的概率分别为 1/2，1/3，1/4，若 3 个人各射击一次，则至少有一个人能击中目标的概率是________.

2. 单项选择题.

(1) 在三局两胜制的比赛中，若以 A_i，$i=1,2,3$ 表示第 i 局甲胜，则甲赢得比赛这一事件可以表示为(　　).

(A) $A_1\cup A_2\cup A_3$；　　(B) $A_1A_2\cup\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3$；

(C) $A_1A_2A_3$；　　(D) $A_1\cup A_2$.

(2) 设事件 A，B 满足 $P(AB)=0$，则(　　).

(A) A 与 B 未必是不可能事件；　　(B) A 与 B 对立；

(C) $AB=\varnothing$；　　(D) A 与 B 互不相容.

(3) 若事件 A，B 同时发生导致事件 C 必然发生，则(　　)

(A) $P(C)=P(AB)$；

(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$；

(C) $P(ABC)\neq 0$；

(D) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$.

1.3　2(3)解析

(4) 设 A，B 为任意两个事件，则 $P(A-B)=($　　$)$.

(A) $P(A)-P(A\bar{B})$；　(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$；

(C) $P(A)-P(B)$；　(D) $P(A)-P(AB)$.

(5) 将一枚均匀的硬币独立地抛掷 3 次，恰有两次正面的概率为(　　).

(A) 1/2；　(B) 1/4；　(C) 1/8；　(D) 3/8.

(6) 设事件 A 与 B 互不相容，则下列选项正确的是(　　).

(A) $P(\bar{A}\bar{B})=0$；　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$；

(C) $P(A)=1-P(B)$；　(D) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$.

(7) 设 $0<P(B)<1$，且 $P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$，则下列选项正确的是(　　).

(A) A 与 B 互不相容；　(B) A 与 B 对立；

(C) A 与 B 独立；　(D) A 与 B 不独立.

(8) 某人向同一目标独立重复射击，若每次击中目标的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 2 次击中目标时恰好射击 4 次的概率为 (　　).

(A) $3p(1-p)^2$；　(B) $6p(1-p)^2$；

(C) $3p^2(1-p)^2$；　(D) $6p^2(1-p)^2$.

(9) 设每次试验失败的概率为 $p(0<p<1)$，将试验独立重复地进行下去，则直到第 n 次才取得首次成功的概率为(　　).

(A) $C_n^1 p(1-p)^{n-1}$；　(B) $C_n^1(1-p)p^{n-1}$；

(C) $p(1-p)^{n-1}$；　(D) $(1-p)p^{n-1}$.

3. 设事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.6$，求 $P(\bar{A}\bar{B})$.

4. 设 3 个事件 A，B，C 满足

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/4,\quad P(AB)=0,\quad P(AC)=P(BC)=1/16,$$

求 A，B，C 都不发生的概率.

5. 若事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(B-A)$.

6. 证明(1) $A-BC=(A-B)\cup(A-C)$；(2) $(AB)\cup(\bar{A}B)\cup(A\bar{B})\cup(\bar{A}\bar{B})-\overline{AB}=AB$.

7. 从编号为 1～10 的 10 张卡片中不放回抽取 2 次，求：两次取到的卡片编号都是偶数的概率；第 2 次取到的卡片编号是偶数的概率.

8. 从 6 双不同的鞋子中随机取出 4 只，求恰有一双配对的概率.

9. 将 4 个人等可能地分配到 5 个房间，求房间中人数最多为 2 的概率(假定每个房间都可以容下 4 个人).

10. 在区间(0，1)上随机取两个数，求两个数差的绝对值小于 1/2 的概率.

11. 在区间[0，1]上任取两个数，求两个数的乘积不小于 3/16，并且和不大于 1 的概率.

12. 设有两个盒子，第一个盒子中装有 3 只红球，3 只绿球，2 只白球；第二个盒子中装有 2 只红球，3 只绿球，4 只白球，现分别从两个盒子中各取一只球.

(1) 求至少有一只红球的概率；

(2) 求有一只红球一只白球的概率；

(3) 已知两只球中有一只为红色，求另一只球为白色的概率.

13. 发射一枚鱼雷击中潜艇致命部位的概率为 1/4，击中非致命部位的概率为 1/2，没击中的概率为 1/4，若潜艇被击中致命部位一次即被击毁，非致命部位被击中 2 次被击毁的概率为 5/9，非致命部位被击中一次被击毁的概率 1/9，求同时发射 2 枚鱼雷潜艇被击毁的概率.

14. 工厂使用的某种元件是由 4 个厂家提供的，4 个厂家的供货量分别占总量的 15%、20%、30%和 35%，又知 4 个厂家生产的元件次品率分别为 0.05、0.04、0.03 和 0.02.

(1) 求任取一个元件为次品的概率；

(2) 若取到的产品为次品，求其是第 4 个厂家提供的概率.

15. 设事件 A，B，C 满足 A，C 互不相容，$P(AB)=1/2$，$P(C)=1/3$，求 $P((AB)|\bar{C})$.

16. 设事件 A，B，C 满足 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$，$P(A|\bar{C})\geqslant P(B|\bar{C})$，证明 $P(A)\geqslant P(B)$.

17. 已知 $P(A)>0$，证明 $P((AB)|A)\geqslant P((AB)|A\cup B)$.

18. 证明事件 A，B 相互独立的充要条件是 $P(A|B)=P(A|\bar{B})$.

19. 若事件 A，B，C 相互独立，证明 C 与 AB 相互独立，C 与 $A\cup B$ 相互独立.

1.4　习题详解

1. 填空题.

(1) $(\bar{A}\bar{B})\cup(\bar{A}\bar{C})\cup(\bar{B}\bar{C})$；(2) $1-a-b+c$；(3) 3/10；(4) 1/5；(5) 2/7；

(6) 1/5；提示 取到的两件产品均为不合格品的样本点数为 C_4^2，恰有一件不合格品的样本点数为 $C_4^1C_6^1$，从而概率为 $\dfrac{C_4^2}{C_4^2+C_4^1C_6^1}$.

(7) 6；提示　依题意，3 次摸到的球全为黑色的概率为 8/27，由于各次摸球相互独立，从而摸到黑球的概率为 2/3，故袋中黑球数为 6.

(8) 3/4.

2. 单项选择题.

(1) (B)；(2) (A)；(3) (B)；(4) (D)；(5) (D)；

(6) (D)；提示　由于 $P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)$，但 $P(A\cup B)$不一定等于 1，故选项(A)错误；因为事件独立与互不相容不能同时成立，故选项(B)错误；若 $P(A)=1-P(B)$，则 $P(A)=P(\bar{B})$，但 A，B 不一定互逆，故选项(C)错误；由于 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(AB)=1$，因此选(D).

(7) (C)；(8) (C)；(9) (D).

3. 因为 A 与 B 互不相容，有 $AB=\varnothing$，故 $P(AB)=0$，从而

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\bar{B})&=1-P(\overline{\bar{A}\bar{B}})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\&=1-(0.3+0.6-0)=0.1.\end{aligned}$$

4. 由于 $ABC\subset AB$，有

$$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0,$$

可得 $P(ABC)=0$，从而有 A，B，C 都不发生的概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})&=1-P(\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]\\&=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0\right)=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

5. 由 A 与 B 相互独立，有 A 与 $\overline{B}$ 相互独立，从而由

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)[1-P(B)]=0.3,$$

可解得 $P(A)=0.6$，进而

$$P(B-A)=P(B\overline{A})=P(B)P(\overline{A})=P(B)[1-P(A)]=0.2.$$

6. (1) $(A-B)\cup(A-C)=(A\overline{B})\cup(A\overline{C})=A(\overline{B}\cup\overline{C})=A(\overline{BC})=A-BC.$

(2) $$\begin{aligned}(AB)\cup(\overline{A}B)\cup(A\overline{B})\cup(\overline{A}\overline{B})-\overline{AB}&=[(A\cup\overline{A})B]\cup[(A\cup\overline{A})\overline{B}]-\overline{AB}\\&=B\cup\overline{B}-\overline{AB}=S-\overline{AB}=AB.\end{aligned}$$

7. 考虑到从 10 张卡片中取出两张的所有可能情况，样本空间中的样本点数为 $C_{10}^{1}C_{9}^{1}$，令 $A=\{$两次取到的卡片编号都是偶数$\}$，则 A 含有的样本点数为 $C_{5}^{1}C_{4}^{1}$，故

$$P(A)=\frac{C_{5}^{1}C_{4}^{1}}{C_{10}^{1}C_{9}^{1}},$$

令 $B=\{$第二次取到的卡片编号是偶数$\}$，则 B 含有的样本点数为 $C_{9}^{1}C_{5}^{1}$，故

$$P(A)=\frac{C_{9}^{1}C_{5}^{1}}{C_{10}^{1}C_{9}^{1}}.$$

8. 由于只关心是否能配对，可以不考虑取出鞋的次序，因此样本空间中的样本点数为 C_{12}^{4}，而能配对的一双鞋为 6 双中的任意一双，再从其余的 5 双中任选两双，并且每双中各取一只，按乘法原理，恰有一双能配对的点数为 $C_{6}^{1}C_{5}^{2}C_{2}^{1}C_{2}^{1}$，所以恰有一双能配对的概率为

$$\frac{C_{6}^{1}C_{5}^{2}C_{2}^{1}C_{2}^{1}}{C_{12}^{4}}.$$

9. 将 4 个人分配到 5 个房间的全部分配方法为 5^4，而人数最多的房间中恰有 1 人的分配方法为 $C_{5}^{1}C_{4}^{1}C_{3}^{1}C_{2}^{1}$，人数最多的房间中恰有 2 人的分配方法为 $C_{5}^{1}C_{4}^{2}C_{4}^{1}C_{3}^{1}+C_{4}^{2}C_{2}^{2}C_{5}^{2}$，从而由古典概型有房间中人数最多为 2 的概率为

$$\frac{C_{5}^{1}C_{4}^{1}C_{3}^{1}C_{2}^{1}}{5^4}+\frac{C_{4}^{2}C_{5}^{1}C_{4}^{1}C_{3}^{1}+C_{4}^{2}C_{2}^{2}C_{5}^{2}}{5^4}=\frac{108}{125}.$$

10. 用 x，y 表示在区间(0，1)取得的两个数，则

$$S=\{(x,y)\mid 0<x,y<1\},$$

令 $A=\{$两数之差的绝对值小于 1/2$\}$，则 $A=\{(x,y)\mid |x-y|<1/2,(x,y)\in S\}$，由几何概型有

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{3}{4}.$$

11. 用 x，y 表示取得的两个数，则样本空间为

$$S=\{(x, y) \mid 0 \leqslant x, y \leqslant 1\},$$

令 $A=\{$两个数的乘积不小于 3/16，且两数之和不大于 1$\}$，则

$$A=\{(x, y) \mid xy \geqslant 3/16, x+y \leqslant 1, (x, y) \in S\},$$

由几何概型有

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\int_{1/4}^{3/4}(1-x)\mathrm{d}x-\int_{1/4}^{3/4}\frac{3}{16x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}\ln 3.$$

12. 令 $A=\{$至少有一只红球$\}$，$B=\{$一只红球和一只白球$\}$，

(1) 由独立性可知，取到的球都不是红球的概率为 $\frac{C_5^1}{C_8^1}\cdot\frac{C_7^1}{C_9^1}$，从而

$$P(A)=1-\frac{C_5^1}{C_8^1}\cdot\frac{C_7^1}{C_9^1}=1-\frac{35}{72}=\frac{37}{72},$$

(2) 令 $C_1=\{$从第一个盒子中取到红球并且从第二个盒子中取到白球$\}$，$C_2=\{$从第一个盒子中取到白球并且从第二个盒子中取到红球$\}$，则 $B=C_1\cup C_2$，从而

$$P(B)=\frac{C_3^1}{C_8^1}\cdot\frac{C_4^1}{C_9^1}+\frac{C_2^1}{C_8^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_9^1}=\frac{2}{9},$$

(3) 由条件概率有

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{2/9}{37/72}=\frac{16}{37}.$$

13. 令 $A=\{$潜艇被摧毁$\}$，$B_1=\{$两枚鱼雷至少有一枚击中致命部位$\}$，$B_2=\{$两枚都击中非致命部位$\}$，$B_3=\{$一枚击中非致命部位并且另一枚没击中$\}$，$B_4=\{$两枚都没有击中$\}$，则由全概率公式有

$$\begin{aligned}
P(A)=&\ P(A \mid B_1)P(B_1)+P(A \mid B_2)P(B_2)+P(A \mid B_3)P(B_3)+P(A \mid B_4)P(B_4)\\
&=1\times P(B_1)+\frac{5}{9}\times P(B_2)+\frac{1}{9}\times P(B_3)+0\times P(B_4)\\
&=\left(1-\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times 2\\
&=\frac{7}{16}+\frac{5}{36}+\frac{1}{36}=\frac{29}{48}.
\end{aligned}$$

14. (1) 令 $A=\{$取到的一个元件为次品$\}$，$B_i=\{$取到的一个元件由第 i 个厂家供货$\}$，$i=1, 2, 3, 4$，由全概率公式有

$$\begin{aligned}
P(A)&=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A \mid B_i)\\
&=0.15\times 0.05+0.2\times 0.04+0.3\times 0.03+0.35\times 0.02\\
&=0.0315,
\end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式有

$$P(B_4 \mid A)=\frac{P(B_4)P(A \mid B_4)}{\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A \mid B_i)}=\frac{0.35\times 0.02}{0.031\,5}\approx 0.222.$$

15. 由 A,C 互不相容,有 $P(AC)=0$,再由 $(ABC)\subset(AC)$,有 $P(ABC)=0$,从而

$$P((AB)\mid \bar{C})=\frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

16. 由 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$,有 $\frac{P(AC)}{P(C)}\geqslant\frac{P(BC)}{P(C)}$,即 $P(AC)\geqslant P(BC)$,类似地,由 $P(A|\bar{C})\geqslant P(B|\bar{C})$,有 $P(A\bar{C})\geqslant P(B\bar{C})$,从而

$$P(AC)+P(A\bar{C})\geqslant P(BC)+P(B\bar{C}),$$

故 $P(A)\geqslant P(B)$.

17. 由 $(A\cup B)\supset A$,有 $0<P(A)\leqslant P(A\cup B)$,从而有

$$P((AB)\mid A\cup B)=\frac{P(AB(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P((ABA)\cup(ABB))}{P(A\cup B)}=\frac{P(AB)}{P(A\cup B)}$$
$$\leqslant\frac{P(ABA)}{P(A)}=P((AB)\mid A).$$

18. 必要性. 若 A,B 相互独立,有 A,$\bar{B}$ 也相互独立,从而有

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)=\frac{P(A)P(\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=P(A\mid\bar{B}),$$

充分性. 由 $P(A|B)=P(A|\bar{B})$,有

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)},$$

整理有 $P(AB)=P(A)P(B)$,故事件 A,B 相互独立.

19. 由 A,B,C 相互独立,有

$$P(AB)=P(A)P(B),\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

从而 $P((AB)C)=P(AB)P(C)$,即 C 与 AB 相互独立. 而

$$P((A\cup B)C)=P((AC)\cup(BC))=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$$
$$=[P(A)+P(B)-P(AB)]P(C)=P(A\cup B)P(C),$$

故 C 与 $A\cup B$ 相互独立.

1.5 拓展训练

1. 设 A,B,C 为三个随机事件,且 A 与 B 互不相容,A 与 C 互不相容,B 与 C 相互独立,$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$,则 $P(B\cup C|A\cup B\cup C)=$________.

1.5 1解析

2. 设 A，B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$，下列命题中不成立的是(　　).

(A) 若 $P(A|B)=P(A)$，则 $P(A|\bar{B})=P(A)$；

(B) 若 $P(A|B)>P(A)$，则 $P(\bar{A}|\bar{B})>P(\bar{A})$；

(C) 若 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$，则 $P(A|B)>P(A)$；

(D) 若 $P(A|A\cup B)>P(\bar{A}|A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)$.

1.5　2 解析

3. 设 A，B，C 为三个随机事件，且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},\quad P(AB)=0,\quad P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12},$$

则 A，B，C 中恰有一个事件发生的概率为(　　).

(A) $\frac{3}{4}$；　(B) $\frac{2}{3}$；　(C) $\frac{1}{2}$；　(D) $\frac{5}{12}$.

1.5　3 解析

4. 设 A，B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$的充分必要条件是(　　).

(A) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；

(B) $P(AB)=P(A)P(B)$；

(C) $P(A\bar{B})=P(B\bar{A})$；

(D) $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$.

1.5　4 解析

5. 某人有两盒火柴，每盒都有 n 根，每次使用火柴时他在两盒火柴中任取一盒，并从中抽出一根，求他用完一盒时另一盒中还有 $r(1\leqslant r\leqslant n)$ 根火柴的概率.

1.5　5 解析