■ 从纷繁里寻规律　■ 从规律里联万物　■ 从万物里探本源　■ 从本源里破新局

迭代升级
培优致远

MATHEMATICS

新高考数学
培优50讲
解析几何

张永辉
主编

清华大学出版社

新高考数学 培优50讲 解析几何
张永辉 主编
清华大学出版社

目　录

第 19 讲
圆锥曲线常见定点定值模型及延伸

解析几何是高中数学的主干知识之一，而直线与圆锥曲线的位置关系更是高考考查的重点与热点，也是高中数学学习中的难点，同时还是教学中需要重点突破的痛点. 如何有效地掌握好解析几何的相关知识以及在这一部分高效得分，始终是每一位教师和学生思考的问题. 除大家耳熟能详的对解析几何的翻译与转化能力、运算能力（尤其是字符化简能力）有较高要求之外，笔者觉得一些基本的二级结论或基本的模型性质也是有必要了解并熟悉的，当然能够达到理解并记忆的水平自然更佳. 因为这样可以有效提升我们思考问题的"跨越度"，快速找到已知条件与所求结论之间的内在联系，进而让我们对题目的本质理解更加透彻，甚至可以了解命题者的命题角度及意图.

本讲就以若干具体的解析几何问题为例，探索其背后所蕴含的基本模型，进而探索这种模型有哪些基本性质或二级结论，最终了解题目的本质.

19.1 模型一 直线定向或过定点模型及延伸

在解析几何中，定点与定值问题常常是伴随状态，如两相交直线的斜率乘积为定值 $\lambda\left(\lambda\neq\frac{b^2}{a^2}\right)$ 时，第三条直线过定点；若两相交直线斜率之和为定值 $\lambda(\lambda\neq 0)$ 时，第三条直线也过定点. 反之，亦成立. 除特例外，我们可将两个模型统一研究，实际上是定点问题的两个侧面. 以椭圆为例，我们将二者统一.

如图 19.1 所示，已知 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，过点 P 作斜率为 k_1,k_2 的两条直线分别与椭圆交于 A,B 两点.

(1)若 $k_1k_2=\frac{b^2}{a^2}$，则有 $x_0\neq 0, k_{AB}=-\frac{y_0}{x_0}$.

(2)若 $k_1k_2=\lambda\left(\lambda\neq\frac{b^2}{a^2}\right)$，则直线 AB 过定点 $\left(\frac{\lambda a^2+b^2}{\lambda a^2-b^2}x_0, -\frac{\lambda a^2+b^2}{\lambda a^2-b^2}y_0\right)$.

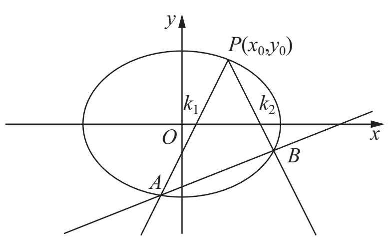


图 19.1

(3)若 $k_1+k_2=0$，则有 $y_0\neq 0, k_{AB}=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

(4)若 $k_1+k_2=\lambda(\lambda\neq 0)$，则直线 AB 过定点 $\left(x_0-\frac{2y_0}{\lambda}, -y_0-\frac{2x_0b^2}{\lambda a^2}\right)$.

19.1.1 斜率之积为定值

1. 斜率之积为−1

研究密钥

若 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，过点 P 作斜率为 k_1,k_2 的两条直线分别与椭圆交于 A,B 两点. 若 $k_1k_2=-1$，即 $PA\perp PB$，直线 AB 过定点 $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0, \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y_0\right)$.

当点 P 位于特殊位置，即椭圆的顶点时，设 $P(a,0)$，直线 AB 过定点 $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}a, 0\right)$.

例 19.1 在直角坐标系 xOy 中，动点 M 到点 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$ 的距离之和是 4，点 M 的轨迹是曲线 C. 若曲线 C 与 x 轴的负半轴交于点 A，不经过点 A 的直线 l 与曲线 C 交于不

同的两点 P 和 Q.

(1)求曲线 C 的方程;

(2)当 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$ 时,证明:直线 l 过定点,并求出此定点的坐标.

分析 (1)由题意可得 $c=\sqrt{3}$,根据椭圆的定义可得 $a=2$,由 $b^2=a^2-c^2$,可得 $b=1$. (2)思路一:设直线方程 $y=kx+m$,将直线方程与椭圆方程联立,根据韦达定理可得 x_1+x_2, x_1x_2,代入 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$,求出 m 与 k 的关系式得到定点.思路二:$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$,即 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=-1$,即两直线斜率之积为定值,故可以用坐标平移齐次化处理.当然也可以根据对称性及模型结论,先猜后证.

解析 (1)因为 $|F_1F_2|=2\sqrt{3}$,$|MF_1|+|MF_2|=4>2\sqrt{3}$,所以动点 M 的轨迹是以 $F_1(-\sqrt{3},0)$,$F_2(\sqrt{3},0)$ 为焦点,以 4 为长轴长的椭圆,即 $2a=4$,$2c=2\sqrt{3}$.故 $a=2$,$c=\sqrt{3}$,$b^2=a^2-c^2=1$.

所以曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)**解法一(代数法)**:①当直线 $l\perp x$ 轴时,设 $P(x_0,y_0)(x_0\in(-2,2])$,$Q(x_0,-y_0)$.

因为点 $A(-2,0)$,则 $\overrightarrow{AP}=(x_0+2,y_0)$,$\overrightarrow{AQ}=(x_0+2,-y_0)$,由 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$ 可得 $(x_0+2)^2-y_0^2=0$,联立 $\begin{cases}(x_0+2)^2-y_0^2=0\\ \dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1\end{cases}$,消去 y_0 并整理得 $5x_0^2+16x_0+12=0$,解得 $x_0=-\dfrac{6}{5}$ 或 $x_0=-2$(舍去).

此时直线 $l:x=-\dfrac{6}{5}$,由题意及椭圆的对称性可知,定点在 x 轴上,故定点为 $\left(-\dfrac{6}{5},0\right)$.

②下面证明在一般情形下,直线 l 都过定点 $\left(-\dfrac{6}{5},0\right)$.

当直线 l 不与 x 轴垂直时,设直线方程为 $l:y=kx+m$,并设点 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,联立方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx+m\end{cases}$,消去 y 整理得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$,则有 $\Delta=(8km)^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)>0$,即 $m^2<4k^2+1$,且 $x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+1}$,$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}$.

因为 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$,且 A 为左顶点,所以 $(x_1+2,y_1)\cdot(x_2+2,y_2)=0$,即 $x_1x_2+2(x_1+x_2)+4+y_1y_2=0$,亦即 $x_1x_2+2(x_1+x_2)+4+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$,整理得 $(k^2+1)x_1x_2+(km+2)(x_1+x_2)+m^2+4=0$①.

将 x_1+x_2,x_1x_2 代入式①,化简得 $5m^2-16km+12k^2=0$,解得 $m=2k$ 或 $m=\dfrac{6k}{5}$.

(i) 当 $m=2k$ 时，$l: y=kx+2k=k(x+2)$ 过左顶点 $(-2,0)$，与题意不符，故舍去；

(ii) 当 $m=\frac{6k}{5}$ 时，$l: y=kx+\frac{6k}{5}=k\left(x+\frac{6}{5}\right)$ 过定点 $\left(-\frac{6}{5},0\right)$，且满足 $m^2<4k^2+1$，符合题意，所以 $m=\frac{6k}{5}$，直线 l 过定点 $\left(-\frac{6}{5},0\right)$.

综上所述，当 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$ 时，直线 l 过定点，其坐标为 $\left(-\frac{6}{5},0\right)$.

解法二(坐标平移齐次化)：直接套用模型：若 $k_1k_2=\lambda\left(\lambda\neq\frac{b^2}{a^2}\right)$，直线过定点 $\left(\frac{\lambda a^2+b^2}{\lambda a^2-b^2}x_0,-\frac{\lambda a^2+b^2}{\lambda a^2-b^2}y_0\right)$. 因为 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=-1$，$A(-2,0)$，所以把 $\lambda=-1$，$x_0=-a=-2$，$y_0=0$ 代入，可得定点 $\left(-\frac{6}{5},0\right)$. 证明如下：

将原坐标系的原点 O 平移至点 $A(-2,0)$，则 $\begin{cases}x=x'-2\\ y=y'\end{cases}$，在新坐标系下椭圆方程为 $\frac{(x'-2)^2}{4}+y'^2=1$，即 $x'^2+4y'^2-4x'=0$.

设直线 l 的方程为 $mx'+ny'=1$，代入椭圆方程得 $x'^2+4y'^2-4x'(mx'+ny')=0$，即 $(1-4m)x'^2+4y'^2-4nx'y'=0$，两边同时除以 x'^2，可得 $4\left(\frac{y'}{x'}\right)^2-4n\frac{y'}{x'}+(1-4m)=0$.

因为 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$，所以 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{1-4m}{4}=-1$，解得 $m=\frac{5}{4}$. 则直线 l 在新坐标系下过定点 $\left(\frac{4}{5},0\right)$，即直线 l 在原坐标系下过定点 $\left(-\frac{6}{5},0\right)$.

探究推广

椭圆内接直角三角形的直角顶点在椭圆的顶点时，斜边过定点

通过上述模型，我们可得一个结论：椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 有内接直角三角形，若直角顶点在椭圆的左顶点 $(-a,0)$ 时，则斜边所在的直线过定点 $\left(\frac{-a(a^2-b^2)}{a^2+b^2},0\right)$.

【证明】如图 19.2 所示，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，将原坐标系的原点 O 平移至点 P，则任意一点的原坐标 (x,y) 与新坐标 (x',y') 的关系为 $\begin{cases}x=x'-a\\ y=y'\end{cases}$. 故椭圆在新坐标系中的方程为 $\frac{(x'-a)^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$，所以椭圆的方程可化为 $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{2}{a}x'=0$.

设直线 AB 在新坐标系中的方程为 $mx'+ny'=1$，将直线 AB 的方程代入椭圆的方程齐次化得 $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{2}{a}x'(mx'+ny')=0$，展开得 $\frac{y'^2}{b^2}-\frac{2n}{a}y'x'+\frac{1-2am}{a^2}x'^2=0$，左、右两边同时除以 x'^2，得 $\frac{1}{b^2}\left(\frac{y'}{x'}\right)^2-\frac{2n}{a}\left(\frac{y'}{x'}\right)+\frac{1-2am}{a^2}=0$.

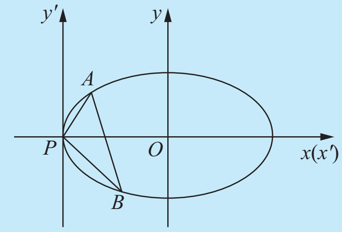


图 19.2

而上述方程的两根即为直线 PA，PB 的斜率，所以由根与系数的关系得 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_1'}{x_1'}\cdot\frac{y_2'}{x_2'}=\frac{b^2(1-2am)}{a^2}$.

若 $PA\perp PB$，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2(1-2am)}{a^2}=-1$，即 $\frac{2b^2a}{a^2+b^2}m=1$. 所以直线 AB 在新坐标系中过定点 $\left(\frac{2b^2a}{a^2+b^2},0\right)$，则直线 AB 在原坐标系中过定点 $\left(\frac{2b^2a}{a^2+b^2}-a,0\right)$，即过定点 $\left(\frac{-a(a^2-b^2)}{a^2+b^2},0\right)$.

同理，不难证明以下结论都是正确的：

若直角顶点在椭圆的右顶点 $(a,0)$ 时，则斜边所在的直线过定点 $\left(\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2},0\right)$.

若直角顶点在椭圆的上顶点 $(0,b)$ 时，则斜边所在的直线过定点 $\left(0,\frac{-b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\right)$.

若直角顶点在椭圆的下顶点 $(0,-b)$ 时，则斜边所在的直线过定点 $\left(0,\frac{(a^2-b^2)b}{a^2+b^2}\right)$.

变式 1　椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，焦距为 $2\sqrt{2}$，点 M 为椭圆上位于 x 轴上方的一点，满足 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，且△$MF_1F_2$ 的面积为 2.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设椭圆 C 的左、右顶点分别为 A，B，直线 l 交椭圆于 P，Q 两点，记直线 AP 的斜率为 k_1，直线 BQ 的斜率为 k_2. 已知 $k_1=2k_2$，过点 B 作直线 PQ 的垂线，垂足为 H，问：在平面内是否存在定点 T，使得 $|TH|$ 为定值，若存在，求出点 T 的坐标；若不存在，试说明理由.

解析　(1)由焦点△MF_1F_2 的面积 $S_{\triangle MF_1F_2}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{b^2}{\tan\frac{\pi}{4}}=b^2=2$，得 $b=\sqrt{2}$. 又 $2c=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}$，则 $a^2=b^2+c^2=4$.

故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)如图 19.3 所示,连接 AQ,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,$k_{QA}\cdot k_{QB}=\frac{y_2}{x_2+2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_2^2}{x_2^2-4}$.

又 $x_2^2+2y_2^2=4$,即 $x_2^2-4=-2y_2^2$,所以 $k_{QA}\cdot k_{QB}=-\frac{1}{2}$. 因为 $k_{PA}=2k_{QB}$,则 $k_{PA}\cdot k_{AQ}=2k_{QB}\cdot k_{AQ}=-1$,所以 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{AQ}$.

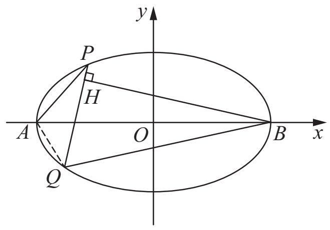


图 19.3

运用坐标平移齐次化的方法计算 PQ 所在的直线过定点,平移坐标系,使点 $A(-2,0)$作为新坐标系的坐标原点 $O'(0,0)$.

在平面 xOy 中的坐标 $P(x,y)$在新坐标系下为 $P'(x',y')$,对应的关系为$\begin{cases}x'=x+2\\y'=y\end{cases}$,即$\begin{cases}x=x'-2\\y=y'\end{cases}$,代入椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 中,$\frac{(x'-2)^2}{4}+\frac{y'^2}{2}=1$,即 $x'^2-4x'+4+2y'^2-4=0$,得 $x'^2+2y'^2-4x'=0$. 直线 PQ:$mx'+ny'=1$,齐次化得 $x'^2+2y'^2-4x'(mx'+ny')=0$,即 $x'^2+2y'^2-4mx'^2-4nx'y'=0$,可得$(1-4m)x'^2+2y'^2-4nx'y'=0$. 所以$(1-4m)+2\left(\frac{y'}{x'}\right)^2-4n\cdot\frac{y'}{x'}=0$,因此 $k_1k_2=\frac{1-4m}{2}=-1$,解得 $m=\frac{3}{4}$.

所以直线 $mx'+ny'=1$ 过定点$\left(\frac{4}{3},0\right)$,平移到原坐标系 xOy 中,可得直线 PQ 过定点 $M\left(-\frac{2}{3},0\right)$. 又 $B(2,0)$,则点 H 在以 BM 为直径的圆上,所以存在定点 $T\left(\frac{2}{3},0\right)$,使得$|TH|$为定值$\frac{4}{3}$.

例 19.2 已知椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,且过点 $A(2,1)$.

(1)求 C 的方程;

(2)点 M,N 在C 上,且 $AM\perp AN$,$AD\perp MN$,D 为垂足. 证明:存在定点 Q,使得$|DQ|$为定值.

分析 因为 $AM\perp AN\Rightarrow k_{AM}\cdot k_{AN}=-1$,所以可以预测直线 MN 会过定点. 先用常规套路求出定点,设为 H,由于 A,H 为定点,AH 为定值,而$\angle ADH=90°$. 取 AH 的中点 Q,则 $DQ=\frac{1}{2}AH$ 为定值.

解析 (1)把点 $A(2,1)$代入椭圆方程可得$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$,离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 再与 $a^2=b^2+c^2$ 联立,可解得 $a=\sqrt{6}$,$b=\sqrt{3}$,$c=\sqrt{3}$. 故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$. 当 MN 不与 x 轴垂直时,设 $MN:y=kx+m$,代入 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-6=0$,所以 $x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}$,$x_1x_2=\frac{2m^2-6}{1+2k^2}$.

由 $AM\perp AN\Rightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0\Rightarrow(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$,整理得 $(k^2+1)x_1x_2+(km-k-2)\cdot(x_1+x_2)+(m-1)^2+4=0$,所以 $(k^2+1)\frac{2m^2-6}{1+2k^2}+(km-k-2)\cdot\frac{-4km}{1+2k^2}+(m-1)^2+4=0$,整理得 $(2k+m-1)(2k+3m+1)=0$.

因为直线 MN 不经过 $A(2,1)$,所以 $2k+m-1\neq0$,则 $2k+3m+1=0$,直线 $MN:y=k\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{3}$. 因此直线 MN 经过定点 $H\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

当 MN 与 x 轴垂直时,容易验证出直线 MN 也经过定点 $H\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$. 由于 $A(2,1)$,$H\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ 为定点,AH 为定值,而 $\angle ADH=90°$,取 AH 的中点 $Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$,则 $DQ=\frac{1}{2}AH=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 为定值.

综上所述,存在定点 $Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ 使得 $|DQ|$ 为定值.

探究推广

椭圆的内接直角三角形,直角顶点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆上(不在椭圆顶点上),则斜边所在的直线过定点 $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0,\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y_0\right)$.

【证明】如图 19.4 所示,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,将原坐标系的原点 O 平移至点 P,则任意一点的原坐标 (x,y) 与新坐标 (x',y') 的关系为 $\begin{cases}x=x'+x_0\\y=y'+y_0\end{cases}$.

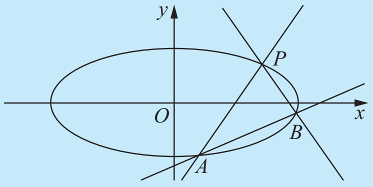


图 19.4

故椭圆在新坐标系中的方程为 $\frac{(x'+x_0)^2}{a^2}+\frac{(y'+y_0)^2}{b^2}=1$,

即 $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{2x_0}{a^2}x'+\frac{2y_0}{b^2}y'+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$.

因为点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，所以 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，则椭圆的方程可化为 $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{2x_0}{a^2}x'+\frac{2y_0}{b^2}y'=0$.

设直线 AB 在新坐标系中的方程为 $mx'+ny'=1$，将直线 AB 的方程代入椭圆的方程齐次化得 $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\left(\frac{2x_0}{a^2}x'+\frac{2y_0}{b^2}y'\right)(mx'+ny')=0$，展开得 $\left(\frac{1+2y_0n}{b^2}\right)y'^2+\left(\frac{2x_0n}{a^2}+\frac{2y_0m}{b^2}\right)x'y'+\left(\frac{1+2x_0m}{a^2}\right)x'^2=0$，左、右两边同时除以 x'^2，可得 $\left(\frac{1+2y_0n}{b^2}\right)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+\left(\frac{2x_0n}{a^2}+\frac{2y_0m}{b^2}\right)\left(\frac{y'}{x'}\right)+\frac{1+2x_0m}{a^2}=0$.

而上述方程的两根即为直线 PA,PB 的斜率，所以由根与系数的关系得 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_1'}{x_1'}\cdot\frac{y_2'}{x_2'}=\frac{b^2(1+2x_0m)}{a^2(1+2y_0n)}$.

若 $PA\perp PB$，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2(1+2x_0m)}{a^2(1+2y_0n)}=-1$，即 $-\frac{2b^2x_0}{a^2+b^2}m-\frac{2a^2y_0}{a^2+b^2}n=1$. 所以直线 AB 在新坐标系中过定点 $\left(-\frac{2b^2x_0}{a^2+b^2},-\frac{2a^2y_0}{a^2+b^2}\right)$，则直线 AB 在原坐标系中过定点 $\left(-\frac{2b^2x_0}{a^2+b^2}+x_0,-\frac{2a^2y_0}{a^2+b^2}+y_0\right)$，即过定点 $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0,\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y_0\right)$.

变式 1 已知点 F 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，点 $P(2,m)(m>0)$ 在抛物线 C 上，且 $|PF|=3$.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)点 M,N 在 C 上，且 $PM\perp PN$，$PD\perp MN$，D 为垂足. 证明：存在定点 Q，使得 $|DQ|$ 为定值.

解析 (1)依题意，由 $|PF|=3$，可得点 P 到准线 $l:x=-\frac{p}{2}$ 的距离为 $2+\frac{p}{2}=3$，解得 $p=2$.

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)如图 19.5 所示，设点 M,N 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，由 $PM\perp PN$ 得 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$.

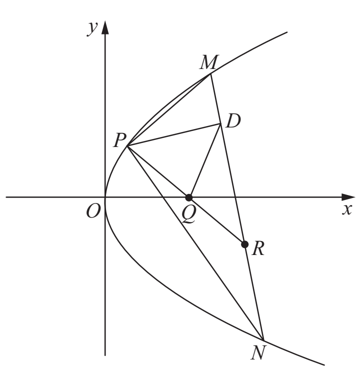


图 19.5

又 $\overrightarrow{PM}=(x_1-2,y_1-2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{PN}=(x_2-2,y_2-2\sqrt{2})$，得

$(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-2\sqrt{2})(y_2-2\sqrt{2})=0$，即$\left(\frac{y_1^2}{4}-2\right)\left(\frac{y_2^2}{4}-2\right)+(y_1-2\sqrt{2})(y_2-2\sqrt{2})=0$，

整理得$\frac{(y_1^2-8)(y_2^2-8)}{16}+(y_1-2\sqrt{2})(y_2-2\sqrt{2})=0$.

所以$(y_1-2\sqrt{2})(y_2-2\sqrt{2})\left[(y_1+2\sqrt{2})(y_2+2\sqrt{2})+16\right]=0$，则$(y_1+2\sqrt{2})(y_2+2\sqrt{2})+16=0$，得$y_1y_2+2\sqrt{2}(y_1+y_2)+24=0(*)$.

又$l_{MN}:y-y_1=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}}\left(x-\frac{y_1^2}{4}\right)$，化简得$4x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$，将式$(*)$代入上式：

$4x-(y_1+y_2)y-24-2\sqrt{2}(y_1+y_2)=0$，即$4x-(2\sqrt{2}+y)(y_1+y_2)=24$.

直线MN过定点$(6,-2\sqrt{2})$，此点设为R. 又$P(2,2\sqrt{2})$，则$|PR|$为定值，若Q为线段PR的中点即$Q(4,0)$，则$|DQ|=\frac{1}{2}|PR|=\frac{1}{2}\sqrt{(6-2)^2+(-2\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$，为定值.

评注

本题实为定点模型：点$P(x_0,y_0)$在抛物线$y^2=2px(p>0)$上，过点P作两直线l_1,l_2分别交抛物线于A,B两点. 若$PA\perp PB$，则直线AB过定点$(x_0+2p,-y_0)$. 只有掌握好一些基本的模型、套路、方法，在解决解析几何问题时才会游刃有余.

模型拓展

双曲线、抛物线内接直角三角形斜边过定点的证明

(1)双曲线中的结论

已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，若直线$l:y=kx+m$与双曲线$C$相交于$A,B$两点($A,B$不是左、右顶点)，则以$AB$为直径的圆过双曲线$C$的右顶点的充要条件是直线$l$过定点$\left(\frac{a(a^2+b^2)}{a^2-b^2},0\right)$.

(2)抛物线中的结论

已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$，若直线$l:y=kx+m$与抛物线C相交于A,B两点(A,B不是原点O)，则以AB为直径的圆过抛物线C上的一点$P(x_0,y_0)$的充要条件是直线l过定点$(2p+x_0,-y_0)$. 当点P与坐标原点重合时，定点坐标为$(2p,0)$.

【证明】双曲线的证明类似于椭圆,在此不再赘述.下面证明抛物线中的模型拓展:

如图19.6所示,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,将原坐标系的原点 O 平移至点 P,则任意一点的原坐标 (x,y) 与新坐标 (x',y') 的关系为 $\begin{cases}x=x'+x_0\\y=y'+y_0\end{cases}$.所以抛物线在新坐标系中的方程为 $(y'+y_0)^2=2p(x'+x_0)$,即 $y'^2+2y_0y'-2px'+y_0^2-2px_0=0$.

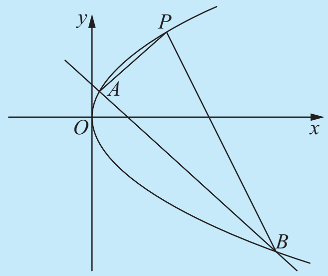


图 19.6

因为点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=2px$ 上,所以 $y_0^2=2px_0$,则抛物线的方程可化为 $y'^2+2y_0y'-2px'=0$.

设直线 AB 在新坐标系中的方程为 $mx'+ny'=1$,将直线 AB 的方程代入抛物线的方程齐次化得 $y'^2+(2y_0y'-2px')(mx'+ny')=0$,展开得 $(1+2y_0n)y'^2+(2y_0m-2pn)x'y'-2pmx'^2=0$,左、右两边同时除以 x'^2,得 $(1+2y_0n)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+(2y_0m-2pn)\left(\frac{y'}{x'}\right)-2pm=0$.

而上述方程的两根即为直线 PA,PB 的斜率,所以由根与系数的关系得 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_1'}{x_1'}\cdot\frac{y_2'}{x_2'}=-\frac{2pm}{1+2y_0n}$.

若 $PA\perp PB$,则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{2pm}{1+2y_0n}=-1$,即 $2pm-2y_0n=1$,所以直线 AB 在新坐标系中过定点 $(2p,-2y_0)$,则直线 AB 在原坐标系中过定点 $(2p+x_0,-2y_0+y_0)$,即过定点 $(2p+x_0,-y_0)$.

当点 P 与坐标原点重合时,定点坐标为 $(2p,0)$.

2.斜率之积不为-1,为定值 $\lambda\left(\lambda\neq\frac{b^2}{a^2}\right)$

研究密钥

如图19.7所示,若 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上一点.过点 P 作斜率为 k_1,k_2 的两条直线分别与椭圆交于 A,B 两点,若 $k_1k_2=\lambda\left(\lambda\neq\frac{b^2}{a^2}\right)$,则直线 AB 过定点 $M\left(\frac{\lambda a^2+b^2}{\lambda a^2-b^2}x_0,-\frac{\lambda a^2+b^2}{\lambda a^2-b^2}y_0\right)$.

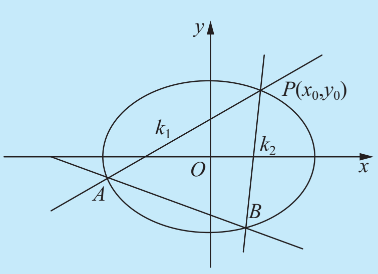


图 19.7

【证明】①当直线 AB 的斜率不存在时，设 $A(x,y)$，$B(x,-y)$，则 $k_1k_2=\frac{y-y_0}{x-x_0}\cdot\frac{-y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_0^2-y^2}{(x-x_0)^2}=\frac{b^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)-b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}{(x-x_0)^2}=\frac{b^2(x+x_0)}{a^2(x-x_0)}=\lambda$，解得 $x=\frac{\lambda a^2+b^2}{\lambda a^2-b^2}x_0$. 所以直线 AB 过定点 $M\left(\frac{\lambda a^2+b^2}{\lambda a^2-b^2}x_0,-\frac{\lambda a^2+b^2}{\lambda a^2-b^2}y_0\right)$.

②当直线 AB 的斜率存在时，将坐标原点平移至点 $P(x_0,y_0)$，则曲线方程变为 $\frac{(x+x_0)^2}{a^2}+\frac{(y+y_0)^2}{b^2}=1$.

在新坐标系下，设直线 AB：$y=kx+m$：

当 $m\neq0$ 时，则有 $\frac{y-kx}{m}=1$，所以 A，B 两点的坐标满足 $b^2x^2+a^2y^2+2b^2x_0x\cdot\frac{y-kx}{m}+2a^2y_0y\cdot\frac{y-kx}{m}=0$，化简得 $a^2(m+2y_0)y^2+(2b^2x_0-2a^2y_0k)xy+b^2(m-2kx_0)x^2=0$(※).

当 $m=0$ 时，方程(※)也成立，在方程(※)两边同时除以 x^2，得 $a^2(m+2y_0)\left(\frac{y}{x}\right)^2+(2b^2x_0-2a^2y_0k)\left(\frac{y}{x}\right)+b^2(m-2kx_0)=0$，所以 $k_1k_2=\frac{b^2(m-2kx_0)}{a^2(m+2y_0)}=\lambda\left(\lambda\neq\frac{b^2}{a^2}\right)$，即 $b^2(m-2kx_0)=\lambda a^2(m+2y_0)$，解得 $m=-\frac{2b^2x_0}{\lambda a^2-b^2}k-\frac{2\lambda a^2y_0}{\lambda a^2-b^2}$.

所以直线 AB 的方程为 $y=kx+m=k\left(x-\frac{2b^2x_0}{\lambda a^2-b^2}\right)-\frac{2\lambda a^2y_0}{\lambda a^2-b^2}$，过定点 $M\left(\frac{2b^2x_0}{\lambda a^2-b^2},-\frac{2\lambda a^2y_0}{\lambda a^2-b^2}\right)$，则直线 AB 在原坐标系下过定点 $M\left(\frac{\lambda a^2+b^2}{\lambda a^2-b^2}x_0,-\frac{\lambda a^2+b^2}{\lambda a^2-b^2}y_0\right)$.

特殊情况：

①当 $\lambda=-1$ 时，即 $PA\perp PB$，直线 AB 过定点 $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0,\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y_0\right)$，此结论在 2020 年新高考全国卷的压轴题中考查过.

②当点 P 位于特殊位置，即椭圆的顶点时，设 $P(a,0)$，$k_1k_2=\lambda\left(\lambda\neq\frac{b^2}{a^2}\right)$，则直线 AB 过定点 $\left(\frac{a^2\lambda+b^2}{a^2\lambda-b^2}a,0\right)$，此结论在 2020 年全国Ⅰ卷中考查过.

例 19.3 (2020 全国Ⅰ理 20)如图 19.8 所示,已知 A,B 分别为椭圆 E:$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的左、右顶点,$G$ 为 E 的上顶点,$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$.$P$ 为直线 $x=6$ 上的动点,PA 与 E 的另一交点为 C,PB 与 E 的另一交点为 D.

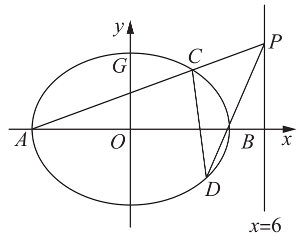


图 19.8

(1)求 E 的方程;

(2)证明:直线 CD 过定点.

分析 (1)已知 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$,分别表示出点 G,A,B 的坐标,代入即可求出 a^2.(2)由中点弦模型,可得在椭圆 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 中,$k_{CA}\cdot k_{CB}=-\frac{1}{9}$.设 CD:$my+t=x$,直线方程与椭圆方程联立可以表示出 $k_{BC}\cdot k_{BD}$,两个乘积的比值可得$\frac{k_{CA}}{k_{BD}}$,即$\frac{k_{PA}}{k_{PB}}$,解方程求出 t 的值,可得直线 CD 过定点.

解析 (1)由题意可得 $G(0,1)$,设 $A(-a,0)$,$B(a,0)$,则 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=(a,1)\cdot(a,-1)=a^2-1=8$,所以 $a^2=9$,又 $a>1$,则 $a=3$.

故 E 的方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

(2)由(1)可知 $A(-3,0)$,$B(3,0)$,设 CD:$my+t=x$,$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,$P(6,y_0)$.

由$\begin{cases}my+t=x\\ \frac{x^2}{9}+y^2=1\end{cases}$得$(m^2+9)y^2+2mty+t^2-9=0$,所以 $y_1+y_2=\frac{-2mt}{m^2+9}$,$y_1y_2=\frac{t^2-9}{m^2+9}$.

$$k_{BC}\cdot k_{BD}=\frac{y_1}{x_1-3}\cdot\frac{y_2}{x_2-3}=\frac{y_1y_2}{(my_1+t-3)(my_2+t-3)}=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+m(t-3)(y_1+y_2)+(t-3)^2},$$

把 y_1+y_2 与 y_1y_2 代入整理得 $k_{BC}\cdot k_{BD}=\frac{t+3}{9(t-3)}$①,由中点弦模型的推论可得 $k_{CA}\cdot k_{BC}=k_{PA}\cdot k_{BC}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{9}$②,$\frac{①}{②}$得$\frac{k_{BD}}{k_{PA}}=\frac{t+3}{3-t}$.

又因为 $k_{PA}=\frac{y_0}{9}$,$k_{PB}=\frac{y_0}{3}=k_{BD}$,所以$\frac{k_{PB}}{k_{PA}}=\frac{t+3}{3-t}=3$,则 $t=\frac{3}{2}$.

故直线 CD:$my+\frac{3}{2}=x$ 经过定点$\left(\frac{3}{2},0\right)$.

评注

在椭圆$\frac{x^2}{9}+y^2=1$中，$k_{CA}\cdot k_{CB}=-\frac{1}{9}$. 又$k_{PB}=3k_{PA}\left(因为\ k_{PA}=\frac{y_0}{9},k_{PB}=\frac{y_0}{3}\right)$，

则$k_{BC}\cdot k_{BD}=\frac{-\frac{1}{9}}{k_{CA}}\cdot k_{BD}=\frac{-\frac{1}{9}}{k_{CA}}\cdot k_{PB}=\frac{-\frac{1}{9}k_{PB}}{k_{PA}}=-\frac{1}{3}$.

因此直线CD过定点$(t,0)$，且$k_{BC}\cdot k_{BD}=\frac{1}{9}\cdot\frac{t+3}{t-3}=-\frac{1}{3}$，即$t=\frac{3}{2}$，所以直线$CD$过定点$\left(\frac{3}{2},0\right)$.

解后反思

【反思一】若将本例中直线方程$x=6$改为$x=9$，试求直线CD过定点的坐标.

若将本题中直线$x=6$改为$x=9$，$P(9,t)$，$k_{PA}=\frac{t}{12}$，$k_{PB}=\frac{t}{6}$，即$\frac{k_{PB}}{k_{PA}}=\frac{k_{BD}}{k_{AC}}=2$，所以$k_{BC}\cdot k_{BD}=k_{BC}\cdot 2k_{AC}=2k_{AC}\cdot k_{BC}=2\cdot\left(-\frac{b^2}{a^2}\right)=-\frac{2}{9}$，为定值.

设直线CD过定点$(n,0)$，则$k_{BC}\cdot k_{BD}=\frac{b^2(n+a)}{a^2(n-a)}=-\frac{2}{9}$，即$\frac{n+3}{n-3}=-2$，也就是$n+3=-2n+6$，所以$n=1$. 因此直线$CD$过定点$(1,0)$.

【反思二】已知椭圆C：$\frac{x^2}{9}+y^2=1$，A,B为左、右顶点，过x轴上定点$T(1,0)$作直线l与椭圆C相交于M,N两点，连接AM,BN，若直线AM,BN相交于点P，求动点P的轨迹方程.

【解析】如图 19.9 所示，令l_{MN}：$x=ty+1$，代入$\frac{x^2}{9}+y^2=1$得$(t^2+9)y^2+2ty+1-9=0$，即$(t^2+9)y^2+2ty-8=0$，$\Delta>0$.

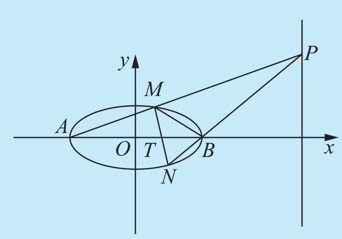


图 19.9

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(x,y)$，则$y_1+y_2=\frac{-2t}{t^2+9}$，$y_1y_2=\frac{-8}{t^2+9}$.

l_{MA}：$\frac{y_1}{x_1+3}=\frac{y}{x+3}$①，$l_{NB}$：$\frac{y_2}{x_2-3}=\frac{y}{x-3}$②，消去$y$得$\frac{y_1(x+3)}{x_1+3}=\frac{y_2(x-3)}{x_2-3}\Rightarrow\frac{y_1(x+3)}{ty_1+4}=$

$\frac{y_2(x-3)}{ty_2-2}$，所以 $y_1(ty_2-2)(x+3)=y_2(ty_1+4)(x-3)$，则 $(ty_1y_2-2y_1)x+3y_1(ty_2-2)=(ty_1y_2+4y_2)x-3y_2(ty_1+4)$，整理得 $(ty_1y_2+4y_2-ty_1y_2+2y_1)x=3ty_1y_2-6y_1+3ty_1y_2+12y_2$，即 $(4y_2+2y_1)x=6ty_1y_2-6y_1+12y_2$.

所以 $x=\frac{6ty_1y_2-6y_1+12y_2}{4y_2+2y_1}=\frac{\frac{-48t}{t^2+9}+\frac{12t}{t^2+9}+18y_2}{2y_2+\left(\frac{-4t}{t^2+9}\right)}=\frac{\frac{-36t}{t^2+9}+18y_2}{\frac{-4t}{t^2+9}+2y_2}=9$. 故动点 P 的轨迹方程为直线 $x=9$.

【反思三】若直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 交于 A,B 两点，点 M 是椭圆的右顶点，且 $k_{MA}\cdot k_{MB}$ 为定值，则直线 l 经过 x 轴上的定点. 反之，若直线 l 经过 x 轴上的定点，且与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于 A,B 两点，点 M 是椭圆的右顶点，则 $k_{MA}\cdot k_{MB}$ 为定值.

【解析】(以第二个结论为例证明)：设直线 l 经过 x 轴上的定点 $(t,0)$，设 $l:my+t=x$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

因为 $M(a,0)$，所以 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{y_1}{x_1-a}\cdot\frac{y_2}{x_2-a}=\frac{y_1y_2}{(my_1+t-a)(my_2+t-a)}$.

由 $\begin{cases}my+t=x\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，则 $(b^2m^2+a^2)y^2+2b^2mty+b^2t^2-a^2b^2=0$，所以 $y_1+y_2=\frac{-2b^2mt}{b^2m^2+a^2}$，$y_1y_2=\frac{b^2t^2-a^2b^2}{b^2m^2+a^2}$.

把上述两式代入 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+m(t-a)(y_1+y_2)+(t-a)^2}$，整理得 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{t+a}{t-a}$，为定值.

变式 1 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{n}=1(0<n<4)$ 经过点 $(\sqrt{2},1)$. 设椭圆 E 的左顶点为 A，直线 $l:x=my+1$ 与 E 相交于 M,N 两点，直线 AM 与直线 $x=4$ 相交于点 Q. 问：直线 NQ 是否经过 x 轴上的定点？若过定点，求出该点坐标；若不过定点，说明理由.

解析 首先我们从此题抽象概括出一个模型，得出一个一般化的结论：如图 19.10(a) 所示，在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，A 为左顶点，l 与椭圆交于 P,Q 两点，l 与 x 轴的交点为 $M(m,0)$，

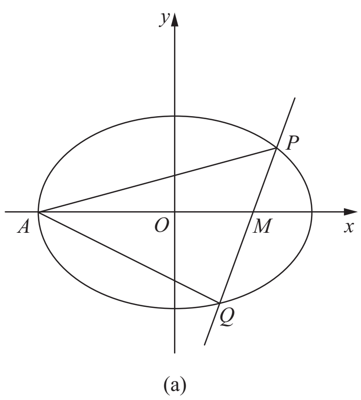
则 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\dfrac{b^2(m-a)}{a^2(m+a)}$.

设 l 的方程为 $y=k(x-m)$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0\\ y=k(x-m)\end{cases}$，消去 y 并整理得 $(a^2k^2+b^2)x^2-2a^2k^2mx+a^2m^2k^2-a^2b^2=0$，由韦达定理可得 $x_1+x_2=\dfrac{2a^2k^2m}{a^2k^2+b^2}$，$x_1x_2=\dfrac{a^2m^2k^2-a^2b^2}{a^2k^2+b^2}$，则 $y_1y_2=k^2(x_1-m)(x_2-m)=\dfrac{m^2b^2k^2-a^2b^2k^2}{a^2k^2+b^2}$，所以 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\dfrac{y_1}{x_1+a}\cdot\dfrac{y_2}{x_2+a}=\dfrac{b^2(m-a)}{a^2(m+a)}$.

特别地，当 M 为 $(\pm c,0)$ 时，$k_{AP}\cdot k_{AQ}=\dfrac{b^2(\pm c-a)}{a^2(\pm c+a)}$.

回到此题中，MN 恒过 $(1,0)$，则 $k_{AM}\cdot k_{AN}=-\dfrac{1}{6}$.



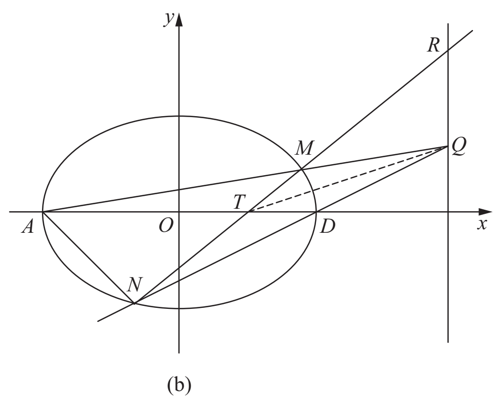


图 19.10

另一方面，如图 19.10(b)所示，由于 R,T,M,N 为调和点列，则 $Q(R,T,M,N)$ 为调和线束，于是有 $\dfrac{(k_{QR}-k_{QM})\cdot(k_{QT}-k_{QN})}{(k_{QR}-k_{QN})\cdot(k_{QT}-k_{QM})}=-1$. 由于 $k_{QR}=\infty$，故 $2k_{QT}=k_{QM}+k_{QN}$.

不妨设 $Q(4,t)$，则 $k_{QT}=\dfrac{t}{3}$，$k_{QM}=k_{QA}=k_{AM}=\dfrac{t}{6}$，那么 $k_{QN}=\dfrac{t}{2}$，由于 $k_{AM}\cdot k_{AN}=-\dfrac{1}{6}$，故 $k_{AN}=-\dfrac{1}{t}$.

最终可得 $k_{NA}\cdot k_{NQ}=-\dfrac{1}{2}$，表明 Q,D,N 三点共线，于是 QD 恒过点 $(2,0)$.

3. 斜率之积不为−1，为定值 $\lambda\left(\lambda=\dfrac{b^2}{a^2}\right)$

研究密钥

设 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的定点，AB 是椭圆上一条动弦，直线 AB，PA，PB 的斜率分别为 k，k_1，k_2.

(1) 若 $k_1k_2=\dfrac{b^2}{a^2}$，则有 $x_0\neq0$，$k=-\dfrac{y_0}{x_0}$.

(2) 若 $k_1k_2\neq\dfrac{b^2}{a^2}$，则直线 AB 过定点(这是上一版块所探讨的).

例 19.4 已知椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 $F_1(-\sqrt{3},0)$，抛物线 C_2：$x^2=2py(p>0)$，C_1 与 C_2 交于点 $A(2,1)$.

(1) 求 C_1 与 C_2 的方程；

(2) 如图 19.11 所示，动直线 l 与 C_1 交于不同两点 M，N，与 C_2 交于不同两点 P，Q，且 $A\notin l$. 记 AM，AN 的斜率分别为是 k_1，k_2，满足 $k_1k_2=\dfrac{1}{2}$，记线段 PQ 的中点 R 的纵坐标为 t，求 t 的取值范围.

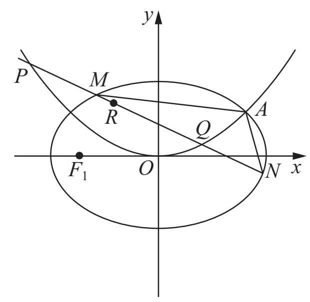


图 19.11

分析 本题即为斜率之积等于 $\dfrac{b^2}{a^2}$ 的情形，由此可求出直线 l 的斜率，设出直线 l 的方程，找出 PQ 中点 R 纵坐标 t 与截距的关系，这样有了截距范围就求出了 t 的范围.

解析 (1) $a^2-b^2=c^2=3$ 且 $\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$，得 $\dfrac{4}{b^2+3}+\dfrac{1}{b^2}=1$，即 $4b^2+b^2+3=b^4+3b^2$，可得 $b^4-2b^2-3=0$，$(b^2-3)(b^2+1)=0$，故 $b^2=3$.

故曲线方程 C_1：$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$C_2$：$x^2=4y$.

(2) 分解处理，如图 19.12 所示，先看椭圆 $A(2,1)$，$k_{AM}\cdot k_{AN}=k_1k_2=\dfrac{1}{2}$，则直线 MN 斜率为定值. 再处理抛物线，看线段 PQ 的中点 R 的纵坐标.

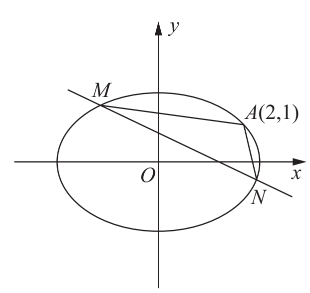


图 19.12

坐标平移齐次化的计算 $A(2,1)\to O'(0,0)$，由 $\begin{cases}x'=x-2\\y'=y-1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=x'+2\\y=y'+1\end{cases}$，椭圆方程 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 在新的坐标系下的方程为 $\dfrac{(x'+2)^2}{6}+$

$\frac{(y'+1)^2}{3}=1$，即 $x'^2+4x'+4+2(y'^2+2y'+1)-6=0$，得 $x'^2+2y'^2+4(x'+y')=0$.

设直线 MN：$mx'+ny'=1$，齐次化得 $x'^2+2y'^2+4(x'+y')(mx'+ny')=0$，即 $x'^2+2y'^2+4(mx'^2+nx'y'+mx'y'+ny'^2)=0$，$(4m+1)x'^2+(4n+2)y'^2+4(m+n)x'y'=0$，则 $4m+1+(4n+2)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+4(m+n)\cdot\frac{y'}{x'}=0$，$k_1k_2=\frac{4m+1}{4n+2}=\frac{1}{2}$，得 $8m+2=4n+2$，即 $2m=n$. 所以直线 $mx'+ny'=1\Leftrightarrow mx'+2my'=1$，$k_{PQ}=-\frac{1}{2}$.

在 $k_{PQ}=-\frac{1}{2}$ 的情形下，求线段 PQ 的中点 R 的纵坐标的范围. $x^2=4y$，$k_{PQ}=-\frac{1}{2}$，点差法或直线联立求解.

PQ：$y=-\frac{1}{2}x+m'$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$R(x_0,y_0)$，$\begin{cases}x^2=4y\\ y=-\frac{1}{2}x+m'\end{cases}$，消 y 建立关于 x 的一元二次方程 $x^2=4\left(m'-\frac{1}{2}x\right)$，即 $x^2+2x-4m'=0$，$\Delta=4+16m'>0$，解得 $m'>-\frac{1}{4}$①；且 $\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+m'\\ x^2+2y^2=6\end{cases}$，消 y 得 $x^2+2\left(-\frac{1}{2}x+m'\right)^2-6=0$，即 $\frac{3}{2}x^2-2m'x+2m'^2-6=0$，$\Delta=4m'^2-4\times\frac{3}{2}\times2(m'^2-3)=4m'^2-12m'^2+36=-8m'^2+36>0$，解得 $m'^2<\frac{9}{2}$，即 $-\frac{3\sqrt{2}}{2}<m'<\frac{3\sqrt{2}}{2}$②.

综合①②得 $-\frac{1}{4}<m'<\frac{3\sqrt{2}}{2}$，且 $m'\neq2$，$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-\frac{1}{2}x_1+m'-\frac{1}{2}x_2+m'}{2}=-\frac{1}{4}(x_1+x_2)+m'=\frac{1}{2}+m'$，所以 $t=m'+\frac{1}{2}\in\left(\frac{1}{4},\frac{3\sqrt{2}+1}{2}\right)$ 且 $t\neq\frac{5}{2}$，即 $t\in\left(\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},\frac{1+3\sqrt{2}}{2}\right)$.

综上所述，t 的取值范围为 $\left(\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},\frac{1+3\sqrt{2}}{2}\right)$.

变式 1　已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，且点 $A(2,1)$ 在双曲线 C 上.

(1)求双曲线 C 的方程；

(2)若点 M,N 在双曲线 C 上，且 $AM\perp AN$，直线 MN 不与 y 轴平行，证明：直线 MN 的斜率 k 为定值.

解析　因为 $e=\sqrt{2}$，所以 $(\sqrt{2})^2=1+\frac{b^2}{a^2}$，解得 $a=b$，则双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$.

把点 $A(2,1)$ 的坐标代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$，得 $\frac{4}{a^2}-\frac{1}{a^2}=1$，解得 $a=\sqrt{3}$，所以双曲线 C 的方程

$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,设直线 MN 的方程为 $y=kx+m$,代入$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$,得 $(1-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0$,于是 $x_1+x_2=\frac{2km}{1-k^2}$,$x_1x_2=\frac{-m^2-3}{1-k^2}$①.

由 $AM\perp AN$,得 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$,则$(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$,整理得$(k^2+1)\cdot x_1x_2+(km-k-2)(x_1+x_2)+m^2-2m+5=0$.

将式①代入上式,可得$\frac{(1+k^2)(-m^2-3)}{1-k^2}+\frac{2km(km-k-2)}{1-k^2}+(m-1)^2+4=0$,整理得 $-8k^2-4km-2m+2=2(2k+1)(1-2k-m)=0$.

因为 $A(2,1)$不在直线 MN 上,所以 $2k+m-1\neq0$,则 $2k+1=0$,解得 $k=-\frac{1}{2}$,即直线 MN 的斜率 k 为定值.

19.1.2 斜率之和为定值

1. 斜率之和为 0

研究密钥

设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,在椭圆上取一点 $M\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$,过点 M 作斜率互为相反数的两条直线交椭圆于 A,B 两点,则 AB 连线的斜率为定值,且此定值为椭圆离心率 e.

【证明】如图 19.13 所示,设直线 MA:$y=k(x-c)+\frac{b^2}{a}$(k 存在且 $k\neq0$),与椭圆方程联立得$(b^2+a^2k^2)x^2+(2ab^2k-2a^2ck^2)x+b^4+a^2c^2k^2-2ab^2ck-a^2b^2=0$,利用根与系数关系得 $x_A+x_M=\frac{2a^2ck^2-2ab^2k}{b^2+a^2k^2}$.

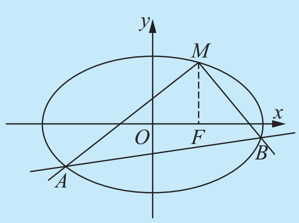


图 19.13

又 $x_M=c$,则 $x_A=\frac{a^2ck^2-2ab^2k-b^2c}{b^2+a^2k^2}$. 同理 $x_B=\frac{a^2ck^2+2ab^2k-b^2c}{b^2+a^2k^2}$,所以 $k_{AB}=$

$$\frac{k(x_A+x_B-2c)}{x_A-x_B}=\frac{k\left(\frac{2a^2ck^2-2b^2c}{b^2+a^2k^2}-2c\right)}{\frac{-4ab^2k}{b^2+a^2k^2}}=\frac{\frac{-4b^2ck}{b^2+a^2k^2}}{\frac{-4ab^2k}{b^2+a^2k^2}}=\frac{c}{a}=e.$$