第一部分　基础知识

第一部分主要涵盖高中阶段的知识,内容难度略高于高考,但在思想方法与解题技巧上更为灵活,要求也更高. 省预赛试题、高联[①]的一试试题和强基计划考试,主要考查的仍是高中范围内的知识,但在思想方法上有所延伸. 通过本篇的学习,读者可以打下坚实的基础,从而为后续的深入学习做好铺垫.

第1讲　集合

考点梳理

1. 集合的相关概念

(1) 集合的定义:研究对象叫作元素,一些元素组成的总体叫作**集合**.

集合中元素的性质:确定性、互异性和无序性.

正确地表达一个集合是学好数学的基础. 描述法是表示集合的重要方法,它基于下面的概括原则.

(2) **(概括原则)**任给一个性质 p,那么存在一个集合 S,它的元素恰好是所有具有性质 p 的对象,即 $S=\{x\mid p(x)\}$,其中 $p(x)$ 表示"元素 x 具有性质 p".

(3) 集合的运算:交集:$A\cap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}$.

并集:$A\cup B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$.

补集:设 U 为全集,则 A 的补集 $\complement_U A=\{x\mid x\in U,且x\notin A\}$.

差集:由所有属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合称为 A 关于 B 的差集,记作 $A-B$,即 $A-B=\{x\mid x\in A,且x\notin B\}$.

2. 集合的运算性质

(1) $A\cup A=A\cap A=A, A\cup\varnothing=A, A\cap\varnothing=\varnothing, \complement_U U=\varnothing, \complement_U\varnothing=U$.

(2) $A\cup(\complement_U A)=U; A\cap(\complement_U A)=\varnothing; \complement_U(\complement_U A)=A$.

(3) **(分配律)** $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C); (A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

(4) $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A; A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$.

(5) **(德·摩根(De Morgan)公式)** $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B); \complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

---

① 全国高中数学联合竞赛,简称高联.

(6) **(容斥原理)** $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$；$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$，其中 $|A|$ 表示集合 A 中元素的个数.

典例精讲

题型一　集合的基本运算

例 1(2024 年高联 A 卷)设实数 a,b 满足：集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-10x+a\leqslant 0\}$ 与 $B=\{x\in\mathbf{R}\mid bx\leqslant b^3\}$ 的交集为 $[4,9]$，则 $a+b$ 的值为______.

解　由于 $x^2-10x+a\leqslant 0\Leftrightarrow(x-5)^2\leqslant 25-a$，故 A 是一个包含 $[4,9]$ 且以 $x=5$ 为中点的闭区间，而 B 是至多有一个端点的区间，所以必有 $A=[1,9]$，故 $a=9$.

进一步可知，B 只能为 $[4,+\infty)$，故 $b<0$ 且 $4b=b^3$，得 $b=-2$. 所以 $a+b=7$.

点评　本题需要结合两个集合 A,B 的特点来确定两个参数 a,b 的值，解法灵活.

例 2(2022 年高联 A 卷)集合 $A=\{n|n^3<2022<3^n,n\in\mathbf{Z}\}$ 的所有元素之和为______.

解　当 $n=7$ 时，$7^3=343<2022$，$3^7=2187>2022$，符合要求.

而 $12^3=1728<2022$，$13^3=2197>2022$，故 n 的取值可以是 7,8,9,10,11,12.

因此，$A=\{7,8,9,10,11,12\}$，其所有元素之和为 57.

点评　考查幂的运算，根据 2022 左、右的两个临界值 $3^7=2187>2022$，$13^3=2197>2022$，可得到 n 的取值是 7,8,9,10,11,12.

例 3(2021 年高联 A 卷)设集合 $A=\{1,2,m\}$，其中 m 为实数. 令 $B=\{a^2\mid a\in A\}$，$C=A\cup B$. 若 C 的所有元素之和为 6，则 C 的所有元素之积为______.

解　由条件知 $1,2,4,m,m^2$(允许有重复)为 C 的全部元素.

注意到，当 m 为实数时，$1+m+m^2>0$，所以 $1+2+4+m+m^2>6$，$1+2+4+m^2>6$，故只可能是 $C=\{1,2,4,m\}$，且 $1+2+4+m=6$，解得 $m=-1$(经检验符合题意)，此时 C 的所有元素之积为

$$1\times 2\times 4\times(-1)=-8.$$

点评　本题容易忽略集合中元素的“互异性”而得到 $1+m+m^2=0$，发现该方程没有实数解，从而卡住. 考虑到元素 $1,2,4,m,m^2$ 中有重复的，且

$$m^2+m+1=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$$

故只可能是 $C=\{1,2,4,m\}$，从而 $m=-1$.

例 4(2025 年贵阳市竞赛)设集合 $A=(-2,2)$，$B=\{x\mid x^2+bx+c\leqslant 0\}$，且 $A\cap B=(-2,1]$，则 $b+c=$__________.

解　因为 $A=(-2,2)$，且 $A\cap B=(-2,1]$，所以方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根 x_1,x_2 满足 $x_1\leqslant -2$，$x_2=1$. 从而 $1+b+c=0$，即 $b+c=-1$.

点评　根据题意分析可知方程 $x^2+bx+c=0$ 必有一根是 1，从而得到答案.

题型二　集合的计数问题

例5(2021年高联A2卷)设集合 $S=\{1,2,3,\cdots,10\}$,S 的子集满足 $A\cap\{1,2,3\}\neq\varnothing$,$A\cup\{4,5,6\}\neq S$,这样的子集 A 的个数为______.

解　先求使 $A\cap\{1,2,3\}\neq\varnothing$ 的集合 A 的取法数 N_1. 在1,2,3中取出至少一个元素的方式有 $2^3-1=7$ 种,而 $4,5,\cdots,10$ 中每个数各有两种选择(取或不取),因此 $N_1=7\times2^7=896$.

再扣除使 $A\cup\{4,5,6\}=S$ 的集合 A 的取法数 N_2. 这些 A 的取法中,1,2,3,7,8,9,10均被取出,而对4,5,6中每个数各有两种选择(取或不取),因此 $N_2=2^3=8$.

从而满足条件的集合 A 的个数为 $N_1-N_2=896-8=888$.

点评　本题有两个关键点:一是学会利用分步乘法计数原理求解集合计数问题;二是先求出使 $A\cap\{1,2,3\}\neq\varnothing$ 成立的子集 A 的取法数 N_1,再扣除其中使 $A\cup\{4,5,6\}=S$ 的取法数 N_2.

例6(2020年高联B卷)设集合 $X=\{1,2,\cdots,20\}$,A 是 X 的子集,A 的元素个数至少是2,且 A 的所有元素可排成连续的正整数,则这样的集合 A 的个数为______.

解　每个满足条件的集合 A 可由其最小的元素 a 与最大的元素 b 唯一确定,其中 $a,b\in X,a<b$,这样的 (a,b) 的取法共有 $\mathrm{C}_{20}^2=190$ 种,所以这样的集合 A 的个数为190.

点评　由题目条件"A 的所有元素可排成连续的正整数"可知,只要确定 A 中的最小元素 a 与最大元素 b,则 A 中的所有元素就唯一确定了.

题型三　集合与其他知识汇交

例7(2021年贵州预赛)已知集合 $M=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant1\}$,集合 $N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant|x|+|y|\}$,则(　　).

A. $M=N$　　B. $M\subseteq N$　　C. $N\subseteq M$　　D. 前三个都不正确

解　M 表示中心在坐标原点,边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形的边界及其内部,N 表示直径为 $\sqrt{2}$ 的4个半圆的边界及其内部,作出图形可知 $M\subseteq N$.

点评　因为集合 M,N 表示的曲线都关于 x 轴、y 轴和原点对称,故只需考虑其在第一象限的图形即可. M 表示线段 $x+y=1(0\leqslant x,y\leqslant1)$ 与坐标轴围成的区域,N 表示半圆 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}(x,y\geqslant0)$ 与坐标轴围成的区域. 然后通过对称性,可画出完整的图形,从而得到 $M\subseteq N$.

例8(2020年广西预赛)设集合 $M=\{1,2,\cdots,2020\}$. 现对 M 的任一非空子集 A,令 λ_A 表示 A 中最大数与最小数之和,则所有这样的 λ_A 的算术平均值是______.

解　将集合 M 的非空子集进行配对.

对每个 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$,不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_k$.

令 $A'=\{2021-x\mid x\in A\}$,则 $\lambda_A=x_1+x_k,\lambda_{A'}=4042-(x_1+x_k)$.

若 $A'\neq A$,则 $\lambda_A+\lambda_{A'}=4042$,即 $\dfrac{\lambda_A+\lambda_{A'}}{2}=2021$;

若 $A'=A$,则 $\lambda_A=\lambda_{A'}=2021$.

综上,所有 λ_A 的算术平均值是2021.

点评　一是理解 λ_A 的含义,二是构造出 $A'=\{2021-x\mid x\in A\}$,与 A 进行配对.

例 9(2020 年山东预赛)数列 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^x+2^y+2^z \mid 0\leqslant x<y<z,x,y,z\in\mathbf{Z}\}$ 中的数从小到大排成的数列,则 $a_{2020}=$______.(用 $2^a+2^b+2^c$ 的形式表示)

解　易知满足 $0\leqslant x<y<z\leqslant n$ 的 (x,y,z) 组合共有 C_{n+1}^3 个.

注意到,$\mathrm{C}_{24}^3=2024>2020$. 设 $f(x,y,z)=2^x+2^y+2^z$,则 $f(21,22,23)=2^{21}+2^{22}+2^{23}$ 是第 $\mathrm{C}_{24}^3=2024$ 项,所以

$$a_{2020}=f(17,22,23)=2^{17}+2^{22}+2^{23}.$$

点评　设 $f(x,y,z)=2^x+2^y+2^z$,则从小到大的前 2024 个数为 $f(0,1,2)$, $f(0,1,3)$, $f(0,2,3)$, $f(1,2,3)$, …, $f(17,22,23)$, $f(18,22,23)$, $f(19,22,23)$, $f(20,22,23)$, $f(21,22,23)$, 故第 2020 个数为 $f(17,22,23)$, 即 $a_{2020}=2^{17}+2^{22}+2^{23}$.

例 10(经典题)记集合 $T=\{0,1,2,3,4,5,6\}$,将 $M=\left\{\frac{a_1}{7}+\frac{a_2}{7^2}+\frac{a_3}{7^3}+\frac{a_4}{7^4}\,\middle|\, a_i\in T,i=1,2,3,4\right\}$ 中的元素从大到小的顺序排列,则第 2011 个数是(　　).

A. $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{1}{7^4}$　　B. $\frac{1}{7}+\frac{0}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{5}{7^4}$

C. $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{0}{7^4}$　　D. $\frac{1}{7}+\frac{0}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{6}{7^4}$

解　(解法 1) 显然,集合 M 中数从大到小依次是 $\frac{6}{7}+\frac{6}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{6}{7^4}$, $\frac{6}{7}+\frac{6}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{5}{7^4}$, $\frac{6}{7}+\frac{6}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{4}{7^4}$, …, $\frac{0}{7}+\frac{0}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{2}{7^4}$, $\frac{0}{7}+\frac{0}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{1}{7^4}$, $\frac{0}{7}+\frac{0}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{0}{7^4}$, 共 $7^4=2401$ 个数.

从大到小第 2011 个数为从小到大第 391 个数. 而 $391=1\times7\times7\times7+48$, 即所求数是集合 M 中比 $\frac{1}{7}+\frac{0}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{0}{7^4}$ 大 48 个单位的数, 而比 $\frac{1}{7}+\frac{0}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{0}{7^4}$ 大 49 个单位的数是 $\frac{1}{7}+\frac{0}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{6}{7^4}$, 故所求的数是 $\frac{1}{7}+\frac{0}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{5}{7^4}$. 选 B.

(解法 2) 因为 $\frac{a_1}{7}+\frac{a_2}{7^2}+\frac{a_3}{7^3}+\frac{a_4}{7^4}=\frac{1}{7^4}(a_1\times7^3+a_2\times7^2+a_3\times7+a_4)$, 括号内为七进制表示法, 其最大值为 $6666_{(7)}$, 该数在十进制中为 2400.

在十进制数中, 从 2400 起按从大到小的顺序排列的第 2011 个数是 $2400-2010=390$, 而 390 在七进制中为 $1065_{(7)}$, 将此数除以 7^4, 便得到 M 中的数 $\frac{1}{7}+\frac{0}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{5}{7^4}$. 选 B.

(解法 3) 在理解解法 2 的基础上, 用同余知识, 可以通过排除法选出答案. 理由如下: $390\equiv5(\bmod 7)$, 而四个选项中对应的七进制数依次为 1101, 1065, 1100, 1066, 显然模 7 余 5 的数只有 1065, 故选 B.

点评　要将集合 $M=\left\{\frac{a_1}{7}+\frac{a_2}{7^2}+\frac{a_3}{7^3}+\frac{a_4}{7^4}\,\middle|\, a_i\in T,i=1,2,3,4\right\}$ 中的所有元素按从大到小的顺序排列, 可转化为十进制数考虑, 再将十进制数转化为七进制数, 即得答案. 对十进制数排序, 关键要找到对应的顺序是几. 如果从大到小排序, 则要找到最大数 (即第一个数), 再找出第 n 个数对应的十进制数即可.

习题 1

1(2024 年浙江预赛)设集合 $A=\left\{x\left|\dfrac{x-1}{2x-1}\leqslant 0\right.\right\}$, 集合 $B=\{x \mid x^2+2x+m\leqslant 0\}$. 若 $A\subseteq B$, 则实数 m 的取值范围为______.

2(2025 年重庆预赛)设集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2025\}$, $B=\{3x \mid x\in A\}$, $C=\{x \mid 3x\in A\}$, 则 $B\cap C$ 的元素个数为______.

3(2021 年高联 B 1 卷)设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4x-y \mid x,y\in A\}$, $C=\{4x+y \mid x,y\in A\}$, 则 $B\cap C$ 的所有元素之和为______.

4(强基模拟)已知集合 $M=\{x,xy,\lg(xy)\}$ 及 $N=\{0,|x|,y\}$, 并且 $M=N$, 那么

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots+\left(x^{2025}+\frac{1}{y^{2025}}\right)$$

的值等于______.

5(强基模拟)若对任意 $x\in A$, 均有 $\dfrac{1}{x}\in A$, 就称 A 是“和谐”集合, 则在集合

$$P=\left\{-\frac{1}{2},-1,-2,0,1,2,3,\frac{1}{3},4,5\right\}$$

的所有非空子集中, “和谐”集合有______个.

6(2025 年北大强基)设 $S=\{1,2,\cdots,2025\}$, 则满足 $A,B\subseteq S, A\cap B\neq\varnothing$ 的二元集 $\{A,B\}$ 有______个.

7(2020 年福建预赛)已知 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, 集合 $A=\{x \mid x^2-x-6<0\}$, $B=\{x \mid 2x^2-3[x]-5=0\}$. 则 $A\cap B=$______.

8(2024 年吉林预赛)设集合 $S=\{1,2,3,4,5\}$. 若 S 的子集 A 满足: 若 $x\in A$, 则 $6-x\in A$, 则称子集 A 具有性质 p, 现从 S 的所有非空子集中, 等可能地取出一个, 则所取出的非空子集具有性质 p 的概率为______.

9(2024 年广西预赛)设 x_1,x_2,x_3,x_4 均是正整数, 且 $\{x_ix_jx_k \mid 1\leqslant i<j<k\leqslant 4\}=\{18,36,54\}$, 则 $x_1+x_2+x_3+x_4=$______.

10集合

$$M=\{u \mid u=12m+8n+4l,m,n,l\in\mathbf{Z}\}$$
$$N=\{u \mid u=20p+16q+12r,p,q,r\in\mathbf{Z}\}$$

的关系为(　　).

A. $M=N$　　B. $M\not\subseteq N, N\not\subseteq M$　　C. $M\subsetneqq N$　　D. $N\subsetneqq M$

11若

$$M=\left\{z\left|z=\frac{t}{1+t}+\mathrm{i}\frac{1+t}{t},t\in\mathbf{R},t\neq -1,t\neq 0\right.\right\},$$
$$N=\{z \mid z=\sqrt{2}[\cos(\arcsin t)+\mathrm{i}\cos(\arccos t)],t\in\mathbf{R},|t|\leqslant 1\}.$$

则 $M\cap N$ 中元素的个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

12(2020 年清华强基)已知集合 $A,B,C\subseteq\{1,2,3,\cdots,2020\}$，且 $A\subseteq C,B\subseteq C$，则有序集合组 (A,B,C) 的个数是（　　）.

A. 2^{2020}　　B. 3^{2020}　　C. 4^{2020}　　D. 5^{2020}

13(2016 年新疆预赛)将集合 $\{2^x+2^y\mid x,y\in\mathbf{N},x<y\}$ 中的数从小到大排列，则第 60 个数为______.(用数字作答)

14(联赛模拟)设 $M=\{1,2,3,\cdots,1995\}$，A 是 M 的子集且满足条件：当 $x\in A$ 时，$15x\notin A$，则 A 中元素的个数最多是______.

15(2020 年广西预赛)设集合 $M=\{1,2,\cdots,2020\}$，$A\subseteq M$，且对集合 A 中的任意元素 x，$4x\notin A$，则集合 A 的元素个数的最大值为______.

16(强基模拟)设集合 $S=\{1,2,\cdots,15\}$，$A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 是 S 的子集，且 (a_1,a_2,a_3) 满足 $1\leqslant a_1<a_2<a_3\leqslant 15$，$a_3-a_2\leqslant 6$，那么满足条件的集合 A 的个数为______.

17(2022 年北大强基)将不大于 12 的正整数分为 6 个两两交集为空的二元集合，且每个集合中两个元素互质，则不同的分法有______种.

第 2 讲　函数的基本性质

考点梳理

1. 偶函数

定义：设 $f(x)$ 的定义域为 I，若 $\forall x \in I$，都有 $-x \in I$，且 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.
特征：偶函数的图像关于 y 轴对称，定义域关于原点对称.
性质：$f(x)=f(|x|)$.

2. 奇函数

定义：设 $f(x)$ 的定义域为 I，若 $\forall x \in I$，都有 $-x \in I$，且 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.
特征：奇函数的图像关于原点对称，定义域关于原点对称.
性质：如果 $f(0)$ 有意义，则一定有 $f(0)=0$.

3. 函数的奇偶性

(1) 两个奇函数之和为奇函数，两个奇函数之积为偶函数；
(2) 两个偶函数之和为偶函数，两个偶函数之积为偶函数；
(3) 奇函数与偶函数之积为奇函数，奇函数与偶函数（$f(x) \neq 0$）之和为非奇非偶函数.

(4) 既是奇函数又是偶函数的函数只有一种类型，即 $f(x)=0, x \in D$，其中定义域 D 是关于原点对称的非空数集.

(5) 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，若 $f(x)$ 为偶函数，则必有 $a=c=0$；若 $f(x)$ 为奇函数，则必有 $b=d=0$.

(6) 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数 $f(x)$ 都可以表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 之和.

证明：对定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数 $f(x)$，令

$$g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}, \tag{①}$$

$$h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}. \tag{②}$$

易知 $g(x)$ 为奇函数，$h(x)$ 为偶函数．联立①②可得，

$$f(x)=g(x)+h(x),\quad \text{证毕}.$$

4. 函数的单调性

$f(x)$ 在区间 D 上单调递增的等价定义：

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2, (x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0;$$

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2, \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$$

5. 函数的奇偶性与单调性

(1) 奇函数在关于原点对称的区间上具有相同的单调性，偶函数在关于原点对称的区间上具有相反的单调性.

(2) 设函数 $f(x)$ 为定义在 D 上的单调递增函数，则函数 $f(x)$ 有如下三个重要性质：

(i) $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$；

(ii) $\forall x_1, x_2 \in D, f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$；

(iii) 若 $f(x_0) = m$（m 为常数），则 x_0 是唯一确定的实数.

6. 函数的周期性

周期函数：一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个非零常数 T，使得对每一个 $x \in D$，都有 $x + T \in D$，且 $f(x+T) = f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫作周期函数. 非零常数 T 叫作这个函数的周期.

最小正周期：如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小的正数就叫作 $f(x)$ 的最小正周期（若不特别说明，T 一般都是最小正周期）.

注： *若 T 是 $y = f(x)(x \in \mathbf{R})$ 的一个周期，则 $nT(n \in \mathbf{Z})$ 也是函数的周期. 若函数 $y = f(x)$ 是常数函数，则 $y = f(x)$ 是周期函数，且无最小正周期.*

设函数 $y = f(x), x \in \mathbf{R}, a > 0$，则关于函数的周期 T（未必是最小正周期），有如下结论：

(1) 若 $f(x+a) = f(x+b)$，则 $T = |a-b|$；

(2) 若 $f(x+a) = -f(x)$，则 $T = 2a$；

(3) 若 $f(x+a) = \dfrac{1}{f(x)}$，则 $T = 2a$；

(4) 若 $f(x+a) = -\dfrac{1}{f(x)}$，则 $T = 2a$；

(5) 若 $f(x+a)f(x) = b(b \neq 0)$，则 $T = 2a$；

(6) 若函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 和点 $(b,0)$ 对称，则 $T = 2|a-b|$；

(7) 若函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 和直线 $x = b$ 对称，则 $T = 4|a-b|$；

(8) 若 $f(x+a) = \dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$，则 $T = 2a$；

(9) 若 $f(x+a) = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$，则 $T = 4a$；

(10) 若 $f(x) = x - [x]$，则 $T = 1$.（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）

(11) 设 $f(x)$ 是周期为 T 的奇函数且 $f\left(\dfrac{T}{2}\right)$ 有意义，则 $f\left(\dfrac{T}{2}\right) = 0$.

证明： (2) 因为 $f(x+2a) = -f(x+a) = f(x)$，所以 $T = 2a$.

(5) 因为 $f(x+2a)f(x+a) = b = f(x+a)f(x)$，即 $f(x+2a) = f(x)$，所以 $T = 2a$，(3) 和 (4) 是 (5) 特殊情形.

(8) $f(x+2a) = \dfrac{1-f(x+a)}{1+f(x+a)} = \dfrac{1-\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}} = f(x)$，所以 $T = 2a$.

(9) $f(x+2a)=\dfrac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=\dfrac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\dfrac{1}{f(x)}$, 由 (4) 知 $T=4a$.

(10) 如图 2-1 所示, 作出 $f(x)=x-[x]$ 的函数图像, 知 $T=1$.

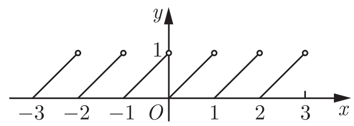

图 2-1

(11) 因为 $f\left(\dfrac{T}{2}\right)=f\left(\dfrac{T}{2}-T\right)=f\left(-\dfrac{T}{2}\right)=-f\left(\dfrac{T}{2}\right)$, 所以 $f\left(\dfrac{T}{2}\right)=0$.

7. 函数的对称性

定理 1　若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且满足 $f(a+x)=f(b-x)$, 则函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称.

定理 2　若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且满足 $f(a+x)+f(b-x)=c$, 则函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{c}{2}\right)$ 对称.

8. 函数的奇偶性、对称性和周期性

一般地, 若函数 $f(x)$ 具有奇偶性和对称性, 则 $f(x)$ 必有周期性; 若函数 $f(x)$ 具有奇偶性和周期性, 则 $f(x)$ 必有对称性; 若函数 $f(x)$ 具有周期性和对称性, 则 $f(x)$ 未必有奇偶性.

(1) $y=f(a+x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称.

(2) $y=f(a+x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(a+x)=-f(a-x)\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 对称.

(3) 若 $f(x)$ 是奇函数且满足 $f(a+x)=f(a-x)$, 则 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称且周期 $T=4a$.

(4) 若 $f(x)$ 是偶函数且满足 $f(a+x)=f(a-x)$, 则 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称且周期 $T=2a$.

(5) 若 $f(x)$ 是奇函数且满足 $f(a+x)=-f(a-x)$, 则 $f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 对称且周期 $T=2a$.

(6) 若 $f(x)$ 是偶函数且满足 $f(a+x)=-f(a-x)$, 则 $f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 对称且周期 $T=4a$.

9. 函数的凹凸性

(1) 凹、凸函数的定义

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, 若对 $\forall x_1,x_2\in I,\lambda\in(0,1)$, 总有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 是 I 上的凸函数.

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, 若对 $\forall x_1,x_2\in I,\lambda\in(0,1)$, 总有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 是 I 上的凹函数.

（2）常见的凸函数有

$$y=x^2+ax+b, y=\mathrm{e}^x, y=x^3(x>0), y=\frac{1}{x}(x>0).$$

常见的凹函数有

$$y=-x^2+ax+b, y=\ln x, y=\sqrt{x}, y=\sin x(0\leqslant x\leqslant \pi), y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

（3）**定理**　设 $f(x)$ 是区间 I 上的二阶可导函数，则在 I 上 $f(x)$ 为凸函数的充要条件是 $f''(x)\geqslant 0$.

（4）**琴生（Jensen）不等式**　若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的凸函数，则对 $\forall x_i\in[a,b], \lambda_i>0(i=1,2,3,\cdots n), \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，有

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\leqslant \lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$$

特别地，取 $\lambda_i=\frac{1}{n}$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

典例精讲

题型一　函数的奇偶性

例 1（2019 年贵州预赛）设 $f(x)=\lg(\sqrt{1+\pi^2x^2}-\pi\cdot x)+\pi$（$\pi$ 是圆周率），若 $f(m)=3$，则 $f(-m)=$______.

解　因为 $y=\lg(\sqrt{1+\pi^2x^2}-\pi\cdot x)$ 是奇函数，所以 $f(m)+f(-m)=2\pi$，得 $f(-m)=2\pi-3$.

点评　设 $a>0$ 且 $a\neq 1$，易知 $g(x)=\log_a\left(\sqrt{1+m^2x^2}+mx\right)$ 是奇函数，这是因为

$$g(x)+g(-x)=\log_a[(1+m^2x^2)-m^2x^2]=\log_a 1=0.$$

例 2（经典题）设 x,y 为实数，且满足 $\begin{cases}(x-1)^3+2025(x-1)=-1,\\(y-1)^3+2025(y-1)=1,\end{cases}$ 则 $x+y=$______.

解　原方程组整理得

$$\begin{cases}(x-1)^3+2025(x-1)+1=0,\\(1-y)^3+2025(1-y)+1=0.\end{cases}$$

设 $f(t)=t^3+2025t+1$，则有 $f(x-1)=f(1-y)$，又 $f(t)$ 单调递增，所以 $x-1=1-y$，即 $x+y=2$.

评析　观察方程的结构，适当变形，构造函数，然后利用函数的单调性来解决问题.

题型二　函数的单调性

例 3（2017 年贵州预赛）已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a,b,c，且 $a^\pi+b^\pi=c^\pi$（π 是圆周率），则 $\triangle ABC$ 为（　　）.

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 以上皆有可能