

5.1 引言

函数常被用来描述客观事物变化的内在规律(数量关系),但是在科学与工程领域许多函数关系的描述通常依赖于离散的数据点,例如,通过实验测量或数值模拟得到函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一些离散点上的函数值、导数值等,却不知道其具体解析表达式。然而许多实际问题需要获取非离散点处的函数值,或需要通过连续模型分析数据的内在规律。因此,希望构造一个既能反映函数特性又便于计算的简单函数 $P(x)$,用来近似代替原来的函数 $f(x)$,而且要求在给定节点处两函数的函数值相等。这样的 $P(x)$ 就是插值函数。插值法就是寻求近似函数的方法之一。下面给出有关插值法的定义。

定义 5.1 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义,且在 $n+1$ 个互异点 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ 处的函数值 $y_i = f(x_i) (i=0, 1, \cdots, n)$ 。若存在一简单函数 $P(x)$,使得

$$P(x_i) = y_i \quad (i=0, 1, \cdots, n) \quad (5.1)$$

成立,就称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数,点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 称为插值节点,区间 $[a, b]$ 称为插值区间。求插值函数 $P(x)$ 的方法称为插值法。

5.1.1 多项式插值

插值函数的选择可以多样化,选择不同的插值函数 $P(x)$ 就产生了不同类型的插值法。若 $P(x)$ 是次数不超过 n 的代数多项式,即

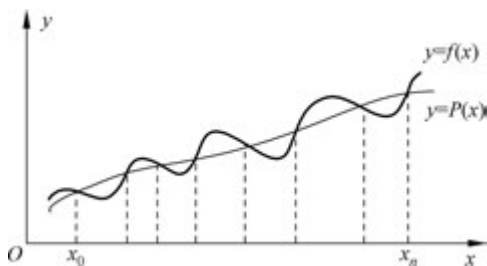
$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (5.2)$$

其中, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是实数,就称 $P(x)$ 为插值多项式,相应的插值法被称为**多项式插值**;若 $P(x)$ 是分段多项式,就称为**分段插值**;若 $P(x)$ 是三角多项式,就称为**三角插值**。多项式函数计算简便,只需用加、减、乘等运算,便于编程计算,而且其导数与积分仍为多项式函数,因此多项式插值成为插值法中最基础且广泛应用的方法。

多项式插值的几何意义:要求一 n 次多项式 $P(x)$ 的图形通过平面上 $n+1$ 个点 $(x_i, y_i) (i=0, 1, \cdots, n)$,并用 $P(x)$ 近似函数 $f(x)$,如图 5.1 所示。

5.1.2 插值多项式的唯一性

定理 5.1 在次数不超过 n 的多项式集合 H_n 中,满足插值条件式(5.1)的插值多项式

图 5.1 n 次多项式 $P(x)$ 的近似函数 $f(x)$

$P(x) \in H_n$ 是唯一的。

证明: 由式(5.2), 插值多项式 $P(x)$ 有 $n+1$ 个待定系数, 插值条件 $P(x_i) = y_i$ ($i=0, 1, \dots, n$) 恰好给出 $n+1$ 个方程:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \quad (5.3)$$

记此方程的系数矩阵为 $\mathbf{A}$, 则

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \quad (5.4)$$

式(5.4)是范德蒙行列式, 利用行列式性质可得

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j)$$

由于 $i \neq j$ 时 $x_i \neq x_j$, 所有因子 $x_i - x_j \neq 0$, 于是 $\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j) \neq 0$, 故方程组(5.3)存在唯一的一组解 $a_0, a_1, \dots, a_n$, 因此插值多项式 $P(x)$ 是唯一的。

定理 5.1 告诉我们, 不管采用哪种方式构造插值多项式, 满足插值条件式(5.1)且形如式(5.2)的插值多项式都是同一个多项式。

本章将系统介绍多项式插值的构造方法、误差估计及其改进策略, 为后续数值计算提供理论基础和实用工具。

5.2 拉格朗日插值

从定理 5.1 的证明可以看到, 要求插值多项式 $P(x)$, 可以通过求方程组(5.3)的解 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 得到。但这样做计算复杂, 且难以得到 $P(x)$ 的简单表达式。为了得到简单而且便于使用的插值多项式, 下面先从最简单的情形讨论, 即两个节点的情形。

5.2.1 线性插值

已知函数 $y=f(x)$ 在节点 x_0, x_1 处有函数值 $y_0=f(x_0), y_1=f(x_1)$, 作一次插值多项式 $P(x)=a_0+a_1x$ 近似 $f(x)$, 使它满足 $y_0=P(x_0), y_1=P(x_1)$ 。这种插值称为线性插值。

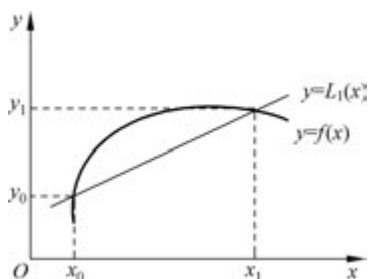


图 5.2 线性插值

从几何图形看, $P(x)$ 就是过两点 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 的直线, 如图 5.2 所示。

其点斜式方程记作

$$L_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad (5.5)$$

改写成两点式方程为

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1 \quad (5.6)$$

显然, $L_1(x_0) = y_0, L_1(x_1) = y_1$ 。 $L_1(x)$ 就是近似 $f(x)$ 的线性插值函数。

由式(5.6)看出, $L_1(x)$ 是由两个线性函数

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

的线性组合得到的, 其系数分别为 y_0 和 y_1 , 即

$$L_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) \quad (5.7)$$

其中, $l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ 在节点 x_0 和 x_1 上满足条件

$$l_0(x_0) = 1, \quad l_0(x_1) = 0, \quad l_1(x_0) = 0, \quad l_1(x_1) = 1 \quad (5.8)$$

称函数 $l_0(x), l_1(x)$ 为一次插值基函数或线性插值基函数, 其图形分别如图 5.3(a) 和图 5.3(b) 所示。

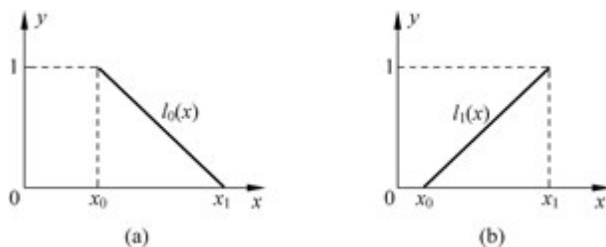


图 5.3 线性插值基函数

5.2.2 抛物插值

下面介绍使用三个节点的抛物插值。

已知函数 $y=f(x)$ 在节点 x_0, x_1, x_2 处有函数值 $y_0=f(x_0), y_1=f(x_1), y_2=f(x_2)$, 作二次插值多项式 $L_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ 近似 $f(x)$, 使它满足

$$y_0 = L_2(x_0), \quad y_1 = L_2(x_1), \quad y_2 = L_2(x_2) \quad (5.9)$$

这种插值称为**抛物插值**。

从几何上看, $y=L_2(x)$ 就是过三点 (x_0, y_0) 、 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的抛物线。根据要满足的条件式(5.9)确定未知系数 a_0 、 a_1 和 a_2 。当然可以用解线性方程组的待定系数法求解, 但是计算量较大。因此仿照线性插值, 用基函数的方法构造抛物插值多项式。构造

$$L_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) \quad (5.10)$$

基函数 $l_0(x)$ 、 $l_1(x)$ 、 $l_2(x)$ 在节点上满足条件

$$\begin{cases} l_0(x_0) = 1, l_0(x_1) = 0, l_0(x_2) = 0 \\ l_1(x_0) = 0, l_1(x_1) = 1, l_1(x_2) = 0 \\ l_2(x_0) = 0, l_2(x_1) = 0, l_2(x_2) = 1 \end{cases} \quad (5.11)$$

满足条件式(5.11)的基函数容易求出。下面以 $l_0(x)$ 为例说明基函数的求取方法。

由 $l_0(x_1) = 0$ 、 $l_0(x_2) = 0$ 可设 $l_0(x) = A(x-x_1)(x-x_2)$, 其中, A 为待定系数, 又 $l_0(x_0) = 1$, 代入解得 $A = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$, 故 $l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$ 。

同理可求得

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \quad l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \quad (5.12)$$

其中, $l_0(x)$ 、 $l_1(x)$ 、 $l_2(x)$ 称为**二次插值基函数**或**抛物插值基函数**。

因此,

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 \quad (5.13)$$

抛物插值是三个二次多项式的线性组合, 是 x 的不高于二次的多项式, 在节点上插值多项式的值和已知函数值相等。

5.2.3 拉格朗日插值

现在考虑一般情形的插值问题。设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 $n+1$ 个互异节点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 上的函数值分别为 $y_0, y_1, \cdots, y_n$, 求 n 次插值多项式 $L_n(x)$, 满足条件

$$L_n(x_i) = y_i \quad (i=0, 1, \cdots, n) \quad (5.14)$$

为了构造 $L_n(x)$, 先定义 n 次插值基函数。

定义 5.2 若 n 次多项式 $l_i(x)$ ($i=0, 1, \cdots, n$) 满足条件

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1, & k=i \\ 0, & k \neq i \end{cases} \quad (i, k=0, 1, \cdots, n) \quad (5.15)$$

就称这 $n+1$ 个 n 次多项式为节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的 n 次插值基函数。

前面已讨论 $n=1$ 和 $n=2$ 的情况, 用类似的推导方法可得 n 次插值基函数为

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)} \quad (i=0, 1, \cdots, n) \quad (5.16)$$

显然它满足条件式(5.15)。

利用 n 次插值基函数立刻可以构造出插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x) \quad (5.17)$$

由 $l_i(x)$ 的定义知 $L_n(x_i) = y_i$ ($i=0, 1, \dots, n$)。

形如式(5.17)的插值多项式 $L_n(x)$ 称为拉格朗日插值多项式。而式(5.7)和式(5.10)是其 $n=1$ 和 $n=2$ 的特殊情形。若引入记号

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \quad (5.18)$$

易求出

$$\begin{cases} \omega'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n) \\ l_i(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} \quad (i=0, 1, \dots, n) \end{cases}$$

于是式(5.17)可以改写成

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} \quad (5.19)$$

5.2.4 插值余项和误差估计

插值多项式与被插值函数之间的差 $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ 称为截断误差或插值余项。

定理 5.2 设函数 $f^{(n)}(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在, 节点 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$, $L_n(x)$ 是满足条件式(5.14)的插值多项式, 则对于任意 $x \in [a, b]$, 插值余项

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad (5.20)$$

这里 $\xi \in (a, b)$ 且依赖于 x 。 $\omega_{n+1}(x)$ 是由式(5.18)定义的。

证明: 由插值条件可知

$$R_n(x_i) = f(x_i) - L_n(x_i) = 0 \quad (i=0, 1, \dots, n) \quad (5.21)$$

所以 $R_n(x)$ 有 $n+1$ 个零点, 可以设

$$R_n(x) = K(x)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) = K(x)\omega_{n+1}(x) \quad (5.22)$$

其中, $K(x)$ 是待定函数。下面推导 $K(x)$ 。

把 x 看成 $[a, b]$ 上一个固定点, 构造函数 $\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)(t - x_0)(t - x_1) \cdots (t - x_n)$ 则 $\varphi(x_i) = 0$ ($i=0, 1, \dots, n$), $\varphi(x) = 0$, 故 $\varphi(t)$ 在 $[a, b]$ 上有 $n+2$ 个零点, 由罗尔定理得知, $\varphi'(t)$ 在 $[a, b]$ 上至少有 $n+1$ 个零点, $\varphi''(t)$ 在 $[a, b]$ 上至少有 n 个零点, 以此类推, $\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 $[a, b]$ 上至少有一个零点, 记作 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$, 即 $f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!K(x) = 0$, 于是 $K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, 其中, $\xi \in (a, b)$ 且依赖于 x , 再将

$K(x)$ 代入式(5.22), 得余项表达式 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$, 证毕。

若求出 $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}$, 那么截断误差限是

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)| \quad (5.23)$$

当 $n=1$ 时, 线性插值的余项为

$$R_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi) \omega_2(x) = \frac{1}{2} f''(\xi) (x - x_0)(x - x_1), \quad \xi \in [x_0, x_1] \quad (5.24)$$

当 $n=2$ 时, 抛物插值的余项为

$$R_2(x) = \frac{1}{6} f'''(\xi) \omega_3(x) = \frac{1}{6} f'''(\xi) (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \quad \xi \in [x_0, x_2] \quad (5.25)$$

拉格朗日插值法的 MATLAB 文件 lagrange_interp.m 如下。

```
function y_interp = lagrange_interp(x, y, x_interp)
% 拉格朗日插值函数
% 输入:
%   x - 已知点的 x 坐标向量(n+1 个点)
%   y - 已知点的 y 坐标向量(n+1 个点)
%   x_interp - 需要插值的 x 坐标点
% 输出:
%   y_interp - 插值结果

n = length(x) - 1;           % 插值多项式的次数
m = length(x_interp);
y_interp = zeros(size(x_interp));

for k = 1:m
    L = 0;
    for i = 1:n+1
        % 计算拉格朗日基函数
        li = 1;
        for j = 1:n+1
            if j ~= i
                li = li * (x_interp(k) - x(j)) / (x(i) - x(j));
            end
        end
        L = L + y(i) * li;
    end
    y_interp(k) = L;
end
end
```

例 5.1 已知 $\cos x$ 在 30° 、 45° 、 60° 的函数值分别是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\frac{1}{2}$, 分别用线性插值和抛物插值求 $\cos 50^\circ$ 的近似值, 并估计误差。

解: (1) 线性插值时, 取靠近 50° 的两个角度 45° 和 60° 作为插值节点。

$$x_0 = 45^\circ, x_1 = 60^\circ, y_0 = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071, y_1 = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0.5。$$

由式(5.6), 插值函数

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 = \frac{x - 60}{45 - 60} \times 0.7071 + \frac{x - 45}{60 - 45} \times 0.5$$

$$\text{所以 } \cos 50^\circ \approx L_1(50^\circ) = \frac{50 - 60}{45 - 60} \times 0.7071 + \frac{50 - 45}{60 - 45} \times 0.5 \approx 0.6380。$$

线性插值的截断误差 $R_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi) (x - x_0)(x - x_1), \xi \in [x_0, x_1]$ 。

将角度转换为弧度: $30^\circ = \frac{\pi}{6}, 45^\circ = \frac{\pi}{4}, 60^\circ = \frac{\pi}{3}, 50^\circ = \frac{5}{18}\pi$, 所以有

$$\begin{aligned} \left| R_1\left(\frac{5}{18}\pi\right) \right| &= \left| \frac{1}{2} \cos \xi \left(\frac{5}{18}\pi - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{5}{18}\pi - \frac{\pi}{3}\right) \right|, \xi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \\ &\leq \left| \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} \left(\frac{5}{18}\pi - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{5}{18}\pi - \frac{\pi}{3}\right) \right| \approx 0.0054 \end{aligned}$$

(2) 抛物插值时, 插值节点是 $x_0 = 30^\circ, x_1 = 45^\circ, x_2 = 60^\circ, y_0 = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$,

$$y_1 = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071, y_2 = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0.5.$$

由式(5.13), 插值函数

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 \\ \cos 50^\circ \approx L_2(50) &= \frac{(50-45)(50-60)}{(30-45)(30-60)} \times 0.8660 + \frac{(50-30)(50-60)}{(45-30)(45-60)} \times \\ &\quad 0.7071 + \frac{(50-30)(50-45)}{(60-30)(60-45)} \times 0.5 \approx 0.6434 \end{aligned}$$

抛物插值的截断误差 $R_2(x) = \frac{1}{6} f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \xi \in [x_0, x_2]$, 所以有

$$\begin{aligned} \left| R_2\left(\frac{5}{18}\pi\right) \right| &= \left| \frac{1}{6} \sin \xi \left(\frac{5}{18}\pi - \frac{\pi}{6}\right) \left(\frac{5}{18}\pi - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{5}{18}\pi - \frac{\pi}{3}\right) \right|, \xi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \\ &\leq \left| \frac{1}{6} \sin \frac{\pi}{3} \left(\frac{5}{18}\pi - \frac{\pi}{6}\right) \left(\frac{5}{18}\pi - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{5}{18}\pi - \frac{\pi}{3}\right) \right| \approx 0.0007 \end{aligned}$$

调用 lagrange_interp.m 函数文件求解例 5.1 的程序如下。

```
x=[30 45 60];
y=[3^(1/2)/2 2^(1/2)/2 1/2];
x_interp=50;
y_interp = lagrange_interp(x, y, x_interp)
```

运行结果如下。

```
y_interp =

    0.6434
```

【数理哲人】

拉格朗日——近代数学与力学奠基的科学巨匠

约瑟夫·路易·拉格朗日(1736—1813 年)是 18~19 世纪一位承前启后的数学巨匠, 原籍意大利, 后主要在普鲁士柏林和法国巴黎工作。他的学术生涯脉络清晰: 早年在家乡都灵几乎自学成才, 并与欧拉通信共同创立了变分法; 1766 年, 接替欧拉出任柏林科学院数学部主任, 进入成果丰硕的黄金二十年; 1787 年, 应路易十六之邀前往巴黎, 虽经历大革

命动荡却声望卓著,不仅主导了米制的制定,还成为拿破仑时期的学术权威。拉格朗日一生致力于追求数学的普遍性与简洁性,偏爱用统一的代数与分析原理来诠释自然规律。

拉格朗日的贡献深远而系统,其核心在于为经典力学和数学分析奠定了现代化基石。他最辉煌的成就是出版了巨著《分析力学》,该书彻底摆脱了牛顿的几何框架,引入广义坐标并推导出核心的拉格朗日方程,构建了一套适用于任何坐标系的强大力学体系。在纯数学领域,他同样成就斐然:与欧拉共同创立了变分法;为微积分的严格化作出早期尝试;证明了数论中的费马平方和定理与威尔逊定理;其关于方程根式解的研究更直接启示了后来的伽罗瓦理论。此外,诸如拉格朗日插值法、拉格朗日乘数法以及天文学中至关重要的拉格朗日点等,都是他留给后世的关键工具与概念。拉格朗日的工作以其深刻的抽象性和普适性著称,他成功地将力学转换为分析学的一个分支,这种“用分析解决力学问题”的思想范式,深刻地影响了柯西、哈密顿等后世科学家,并成为理论物理学发展的核心驱动力。为了纪念他,大量数学与物理概念以他的名字命名,这不仅彰显了其个人成就,更标志着他的体系化工作成为科学史上连接牛顿与近代科学的重要桥梁。

5.3 差商与牛顿插值

拉格朗日插值是用基函数构造的插值,其优点是形式对称,易于编程实现。但是当增加或减少节点时,所有的基函数需要重新计算,这就造成了计算量的浪费。为了克服这个缺点,本节将从直线的点斜式方程出发,推广出另一种具有递推形式的插值公式,即牛顿插值。

5.3.1 差商及其性质

假设 $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, 构造线性插值函数 $N_1(x)$, 使它满足 $N_1(x_0) = f(x_0)$, $N_1(x_1) = f(x_1)$ 。由直线的点斜式方程可得

$$N_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

将它推广到 $[a, b]$ 上具有 $n+1$ 个互异插值节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 的情况, 则可将插值多项式表示为

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \quad (5.26)$$

其中, $a_0, a_1, \dots, a_n$ 为待定系数, 可由插值条件

$$N_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (5.27)$$

确定。

由式(5.27), 有

$$N_n(x_0) = f(x_0), \quad \text{得 } a_0 = f(x_0)$$

$$N_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1), \quad \text{得 } a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$N_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2),$$

$$\text{得 } a_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

以此类推,可得到 $a_3, \dots, a_n$ 。为写出系数 a_k 的一般表达式,引进差商的定义。

定义 5.3 称 $f[x_0, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$ 为函数 $f(x)$ 关于点 x_0, x_k 的一阶差商,称

$$f[x_0, x_1, x_k] = \frac{f[x_0, x_k] - f[x_0, x_1]}{x_k - x_1}$$

为 $f(x)$ 关于点 x_0, x_1, x_k 的二阶差商。一般地,称

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}} \quad (5.28)$$

为 $f(x)$ 的 k 阶差商。

差商具有如下基本性质。

(1) k 阶差商可以表示为函数值 $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_k)$ 的线性组合,即

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_k)} \quad (5.29)$$

证明: 当 $k=1$ 时,有

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

当 $k=2$ 时,有

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{\left(\frac{f(x_0)}{x_0 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_0} \right) - \left(\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \right)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

假设当 $k=m-1$ 时结论成立,即

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}] = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_{m-1})}$$

$$f[x_0, \dots, x_{m-2}, x_m] = \sum_m \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_{m-2})(x_i - x_m)}$$

当 $k=m$ 时,由差商定义

$$f[x_0, x_1, \dots, x_m] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{m-2}, x_m] - f[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}]}{x_m - x_{m-1}}$$

将两个 $m-1$ 阶差商代入,有

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_m] &= \frac{1}{x_m - x_{m-1}} \left[\frac{f(x_0)(x_m - x_{m-1})}{(x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_m)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{f(x_1)(x_m - x_{m-1})}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_m)} + \cdots + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{f(x_{m-2})(x_m - x_{m-1})}{(x_{m-2} - x_0)(x_{m-2} - x_1) \cdots (x_{m-2} - x_m)} - \\
& \left[\frac{f(x_{m-1})}{(x_{m-1} - x_0) \cdots (x_{m-1} - x_{m-2})} + \frac{f(x_m)}{(x_m - x_0) \cdots (x_m - x_{m-2})} \right] \\
& = \sum_{i=0}^m \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_m)}
\end{aligned}$$

由一般归纳法结论成立。

式(5.29)表明差商与节点的排列次序无关,这个性质被称为差商的对称性。

(2) 各阶差商具有对称性:

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = f[x_1, x_0, x_2, \cdots, x_k] = \cdots = f[x_1, x_2, \cdots, x_k, x_0]$$

即改变节点的排列次序,差商值不变。

(3) 由基本性质(1)和式(5.28)可得

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad (5.30)$$

(4) 若 $f(x)$ 是 x 的 n 次多项式,则一阶差商 $f[x, x_0]$ 是 x 的 $n-1$ 次多项式,二阶差商 $f[x, x_0, x_1]$ 是 x 的 $n-2$ 次多项式;一般地, $f(x)$ 的 k 阶差商 $f[x, x_0, \cdots, x_{k-1}]$ 是 x 的 $n-k$ 次多项式 ($k \leq n$), 而 $k > n$ 时, k 阶差商为零。

事实上,若 $f(x)$ 是 x 的 n 次多项式,令 $P(x) = f(x) - f(x_0)$, 则 $P(x)$ 也是 x 的 n 次多项式,且 $P(x_0) = 0$, 可设 $P(x) = (x - x_0)P_{n-1}(x)$, 其中, $P_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次多项式。

所以 $f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = P_{n-1}(x)$ 是 $n-1$ 次多项式。以此类推,可得 $f(x)$ 的 k 阶差商是 x 的 $n-k$ 次多项式 ($k \leq n$)。当 $k = n$ 时, $f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}]$ 是零次多项式,即常数,因此 $k > n$ 时, $f(x)$ 的 k 阶差商恒为零。

(5) 若 $f^{(n)}(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续,则

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a, b] \quad (5.31)$$

计算各阶差商可按表 5.1 进行。

表 5.1 计算各阶差商

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

5.3.2 牛顿插值公式

下面推导牛顿插值公式。根据差商定义,把 x 看成 $[a, b]$ 上的一点,可得

$$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$$

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$$

$$\vdots$$

$$f[x, x_0, \dots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n] + f[x, x_0, \dots, x_n](x - x_n)$$

把后一式代入前一式, 可得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ &\quad f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) + f[x, x_0, \dots, x_n]\omega_{n+1}(x) \\ &= N_n(x) + R_n(x) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} N_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ &\quad f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$R_n(x) = f[x, x_0, \dots, x_n]\omega_{n+1}(x) \quad (5.33)$$

$\omega_{n+1}(x)$ 是式(5.18)所定义的。显然, $R_n(x_i) = 0$, 故 $N_n(x)$ 满足插值条件式(5.27), 且次数不超过 n , 它就是形如式(5.26)的多项式, 称 $N_n(x)$ 为 $f(x)$ 的不超过 n 次的牛顿差商插值多项式。其系数 $a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k] (k=0, 1, \dots, n)$ 就是 $f(x)$ 的各阶差商, 即表 5.1 中加横线的各阶差商。

由插值多项式的唯一性知, 式(5.33)与式(5.20)是等价的。但式(5.33)更具有一般性。它对 $f(x)$ 是由离散点给出或 $f(x)$ 的导数不存在时均适用。与拉格朗日插值相比, 牛顿插值的明显优点是, 每增加一个节点, 只要在原牛顿插值公式中增加一项就可以形成高一次的插值公式, 因此它具有递推性质:

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

牛顿差商插值法的 MATLAB 文件 newton_interp.m 如下。

```
function y_interp = newton_interp(x, y, x_interp)
% 牛顿差商插值函数
% 输入: x - 已知点的 x 坐标向量(n+1 个点); y - 已知点的 y 坐标向量(n+1 个点);
% x_interp - 需要插值的 x 坐标点
% 输出:
% y_interp - 插值结果
n = length(x) - 1;
% 计算差商表
F = zeros(n+1, n+1);
F(:,1) = y(:); % 第一列是函数值
% 构造差商表
for j = 2:n+1
    for i = j:n+1
        F(i,j) = (F(i,j-1) - F(i-1,j-1)) / (x(i) - x(i-j+1));
    end
end
% 提取差商(对角线元素)
a = diag(F) % 差商系数
% 计算插值结果
m = length(x_interp);
y_interp = zeros(size(x_interp));
for k = 1:m
```

```

% 使用嵌套乘法计算牛顿多项式值
p = a(n+1);
for i = n:-1:1
    (x_interp(k) - x(i))
    p
    p = a(i) + (x_interp(k) - x(i)) * p;
    p
end
y_interp(k) = p;
end
end

```

例 5.2 已知函数 $y = \ln x$ 的函数表如表 5.2 所示。

表 5.2 $y = \ln x$ 的函数表

x	0.4	0.5	0.6
$y = \ln x$	-0.916291	-0.693147	-0.510826

构造二次牛顿插值多项式求 $\ln 0.54$ 的近似值,并估计误差。

解: 计算各阶差商,作差商表如表 5.3 所示。

表 5.3 例 5.2 各阶差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
$x_0 = 0.4$	-0.916291		
$x_1 = 0.5$	-0.693147	2.231440	
$x_2 = 0.6$	-0.510826	2.027325	-2.04115

二次牛顿插值多项式

$$\begin{aligned}
 N_2(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
 &= -0.916291 + 2.231440(x - 0.4) - 2.04115(x - 0.4)(x - 0.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } \ln 0.54 &= -0.916291 + 2.231440 \times (0.54 - 0.4) - 2.04115 \times (0.54 - 0.4) \times (0.54 - 0.5) \\
 &= -0.61531984
 \end{aligned}$$

下面估计截断误差。

$$\text{对 } f(x) = \ln x, f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}, \max_{0.4 \leq x \leq 0.6} |f^{(3)}(x)| = \left| \frac{2}{0.4^3} \right| = 31.25, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned}
 |R_2(x)| &= \left| \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} (x - 0.4)(x - 0.5)(x - 0.6) \right|, \xi \in [0.4, 0.6] \\
 &\leq \left| \frac{31.25}{3!} \times (0.54 - 0.4) \times (0.54 - 0.5) \times (0.54 - 0.6) \right| = 0.00175
 \end{aligned}$$

调用 newton_interp.m 文件求解例 5.2 的程序如下。

```

x=[0.4 0.5 0.6];
y=[-0.916291 -0.693147 -0.510826];
x_interp=0.54;
y_interp = newton_interp(x, y, x_interp)

```

运行结果如下。

```
a =
-0.916291
 2.231440
-2.04115

y_interp =
-0.61531984
```

例 5.3 已知连续函数 $f(x)$ 在 $x = -1, 0, 2, 3$ 的函数值分别是 $-4, -1, 0, 3$, 用牛顿插值求 $f(1.5)$ 的近似值。

解: 根据已知函数值, 构造如表 5.4 所示差商表。

表 5.4 例 5.3 各阶差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-1	-4			
0	-1	3		
2	0	0.5	$-\frac{5}{6}$	
3	3	3	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{12}$

则牛顿插值多项式

$$\begin{aligned}
 N_3(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\
 &\quad f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
 &= -4 + 3(x + 1) - \frac{5}{6}(x + 1)(x - 0) + \frac{5}{12}(x + 1)(x - 0)(x - 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore N_3(1.5) &= -4 + 3 \times (1.5 + 1) - \frac{5}{6} \times (1.5 + 1)(1.5 - 0) + \frac{5}{12} \times (1.5 + 1)(1.5 - 0)(1.5 - 2) \\
 &= -0.40625
 \end{aligned}$$

$$\therefore f(1.5) \approx N_3(1.5) = -0.40625$$

调用 newton_interp.m 文件求解例 5.3 的程序如下。

```
x = [-1 0 2 3];
y = [-4 -1 0 3];
x_interp = 1.5;
y_interp = newton_interp(x, y, x_interp)
```

运行结果如下。

```
a =
-4.0000
 3.0000
-0.8333
 0.4167
y_interp =
-0.4062
```

【数理哲人】

艾萨克·牛顿——现代科学奠基的巨人

艾萨克·牛顿(1643—1727年)是英国物理学家、数学家和天文学家,科学革命的关键人物,被公认为历史上最具影响力的科学家之一。他出生于英格兰伍尔索普,1661年进入剑桥大学三一学院学习,在1665—1666年因瘟疫离校返乡期间,形成了微积分、万有引力和光学理论的基本思想。其主要贡献包括创立经典力学体系(三大运动定律和万有引力定律),发明微积分(与莱布尼茨各自独立完成),建立光的粒子说和色散理论。这些成果汇集于其不朽著作《自然哲学的数学原理》中,为近代科学奠定了坚实基础。

在数值计算方法领域,牛顿作出了两项开创性贡献:牛顿插值法和牛顿迭代法。牛顿插值法基于差商理论,通过构造递推形式的插值多项式来逼近离散数据,具有便于增减节点的实用优势。牛顿迭代法则利用函数的导数信息,通过切线逼近的迭代过程高效求解非线性方程,在单根附近具有二阶收敛速度,成为数值分析中最基本的求根算法之一。

这些数值方法的创立,体现了牛顿将深刻数学理论转换为实用计算工具的卓越能力。牛顿插值为函数逼近和数值微分提供了有效工具,而牛顿迭代法则成为后续非线性方程组求解、优化算法等现代数值方法的基础。牛顿不仅在理论科学上构建了完整的体系,在计算方法上也开辟了重要路径,其科学遗产至今仍深刻影响着科学计算和工程应用。

5.4 差分与等距节点插值公式

在实际应用中经常会遇到等距节点的情形,这时差商和牛顿插值公式还可以进一步简化。

5.4.1 差分

设函数 $y=f(x)$ 在等距节点 $x_k=x_0+kh$ ($k=0,1,\dots,n$) 上的值 $f_k=f(x_k)$, $f_{k+\frac{1}{2}}=f\left(x_k+\frac{h}{2}\right)$ 是已知的, h 是常数,称为步长。

定义 5.4 称增量

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

$$\nabla f_k = f_k - f_{k-1}$$

$$\delta f_k = f_{k+\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{1}{2}}$$

分别为 $f(x)$ 在 x_k 处的一阶向前差分、向后差分和中心差分。符号 Δ 、 ∇ 、 δ 分别称为向前差分算子、向后差分算子以及中心差分算子。

利用一阶差分可以定义二阶差分为

$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k$$

$$\nabla^2 f_k = \nabla f_k - \nabla f_{k-1}$$

一般地,可定义 m 阶差分为

$$\Delta^m f_k = \Delta^{m-1} f_{k+1} - \Delta^{m-1} f_k$$

$$\nabla^m f_k = \nabla^{m-1} f_k - \nabla^{m-1} f_{k-1}$$

除了引入的差分算子外,常用算子符号还有**不变算子 I**以及**移位算子 E**,定义如下。

$$If_k = f_k$$

$$Ef_k = f_{k+1}$$

于是由 $\Delta f_k = f_{k+1} - f_k = Ef_k - If_k = (E - I)f_k$ 可得 $\Delta = E - I$, 同理可得 $\nabla = I - E^{-1}$, $\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$ 。

5.4.2 差分的性质

性质 5.1 各阶差分可以表示成函数值的线性组合,即

$$\Delta^n f_k = (E - I)^n f_k = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i f_{n+k-i} \quad (5.34)$$

$$\nabla^n f_k = (I - E^{-1})^n f_k = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} C_n^i f_{k+i-n} \quad (5.35)$$

其中, $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ 为二项展开式系数。

证明: 下面用数学归纳法证明式(5.34)。

当 $n=1$ 时,有 $\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$, 式(5.34)成立。

假设当 $n=r$ 时式(5.34)成立,即

$$\Delta^r f_k = \sum_{i=0}^r (-1)^i C_r^i f_{r+k-i} = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i C_r^i f_{r+k-i} + (-1)^r f_k$$

$$\Delta^r f_{k+1} = \sum_{i=0}^r (-1)^i C_r^i f_{r+k+1-i} = f_{k+1+r} + \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{i+1} C_r^{i+1} f_{r+k-i}$$

将以上二式代入 $\Delta^{r+1} f_k = \Delta^r f_{k+1} - \Delta^r f_k$ 表达式,整理得

$$\Delta^{r+1} f_k = f_{k+r+1} + \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{i+1} (C_r^{i+1} + C_r^i) f_{r+k-i} - (-1)^r f_k$$

又 $C_r^{i+1} + C_r^i = C_{r+1}^{i+1}$, 所以

$$\Delta^{r+1} f_k = f_{k+r+1} + \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{i+1} C_{r+1}^{i+1} f_{r+k-i} + (-1)^{r+1} f_k = \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i C_{r+1}^i f_{r+k+1-i}$$

故当 $n=r+1$ 时,式(5.34)也成立,式(5.34)得证。

类似可证明式(5.35)。

反过来,还可以用差分表示函数值,例如, $f_{n+k} = E^n f_k = (I + \Delta)^n f_k = \sum_{i=0}^n C_n^i \Delta^i f_k$ 。

性质 5.2 在等距节点的情况下,差分 and 差商及导数有如下关系。

$$\Delta^n f_k = n! h^n f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}] = h^n f^{(n)}(\xi) \quad (5.36)$$

$$\nabla^n f_k = n! h^n f[x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-n}] = h^n f^{(n)}(\xi) \quad (5.37)$$

例如,对于向前差分,由定义

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{h} = \frac{\Delta f_k}{h}$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} = \frac{\frac{\Delta f_{k+1}}{h} - \frac{\Delta f_k}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 f_k}{2h^2}$$

一般地, 可得 $f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}] = \frac{\Delta^n f_k}{n! h^n}$, 又 $f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$, 所以

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}] = \frac{\Delta^n f_k}{n! h^n} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \text{ 即 } \Delta^n f_k = n! h^n f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}] = h^n f^{(n)}(\xi).$$

同理可推导式(5.37)。

计算差分可以列差分表, 向前差分表如表 5.5 所示, 向后差分表如表 5.6 所示。

表 5.5 向前差分表

x_k	f_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$	$\Delta^4 f_k$	...
x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$	
x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$		
x_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$			
x_3	f_3	Δf_3				
x_4	f_4					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

表 5.6 向后差分表

x_k	f_k	∇f_k	$\nabla^2 f_k$	$\nabla^3 f_k$	$\nabla^4 f_k$	...
x_0	f_0					
x_1	f_1	∇f_1				
x_2	f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_2$			
x_3	f_3	∇f_3	$\nabla^2 f_3$	$\nabla^3 f_3$		
x_4	f_4	∇f_4	$\nabla^2 f_4$	$\nabla^3 f_4$	$\nabla^4 f_4$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

5.4.3 等距节点插值公式

将牛顿插值多项式(5.32)中的各阶差商用相应差分代替, 就可以得到等距节点下的牛顿前插和后插公式。

设等距节点 $x_k = x_0 + kh$ ($k=0, 1, \dots, n$), 记 $f_k = f(x_k)$ 。当 $x \in [x_0, x_n]$ 时, 令 $x = x_0 + th$ ($0 \leq t \leq n$), $x - x_k = (x_0 + th) - (x_0 + kh) = (t - k)h$, 将式(5.32)中的差商用差分代替, 得

$$N_n(x_0 + th) = f_0 + t \Delta f_0 + \frac{1}{2!} t(t-1) \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{1}{n!} t(t-1) + \dots + (t-n+1) \Delta^n f_0 \quad (5.38)$$

式(5.38)称为牛顿前插公式, 此时 $\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k) = t(t-1) \dots (t-n) h^{n+1}$ 。其

余项由式(5.20)得

$$R_n(x_0 + th) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_n) \quad (5.39)$$

类似地,有牛顿后插公式($-n \leq t \leq 0$):

$$N_n(x_n + th) = f_n + t \nabla f_n + \frac{1}{2!} t(t+1) \nabla^2 f_n + \cdots + \frac{1}{n!} t(t+1) + \cdots + (t+n-1) \nabla^n f_n \quad (5.40)$$

余项为

$$R_n(x_n + th) = \frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_n) \quad (5.41)$$

牛顿前插公式和后插公式均是牛顿插值公式在等距节点时的变形。一般来说,要计算节点 x_0 附近点的函数值 $f(x)$ 用牛顿前插公式;要计算 x_n 附近的函数值用牛顿后插公式。

编写牛顿前插公式的 MATLAB 文件 newton_forward_interp.m 如下。

```
function y_interp = newton_forward_interp(x, y, x_interp, pn)
% 牛顿向前插值函数
% 输入:
%   x - 等距节点的 x 坐标向量(n+1 个点)
%   y - 等距节点的 y 坐标向量(n+1 个点)
%   x_interp - 需要插值的 x 坐标点
%   pn - 次数
% 输出:
%   y_interp - 插值结果
n = length(x) - 1;
% 检查节点是否等距
h = x(2) - x(1);
for i = 2:n
    if abs((x(i+1) - x(i)) - h) > 1e-10
        error('节点必须等距分布!');
    end
end
% 计算前向差分表
delta = zeros(n+1, n+1);
delta(:, 1) = y(:); % 第一列是函数值
% 构造前向差分表
for j = 2:n+1
    for i = 1:n-j+2
        delta(i, j) = delta(i+1, j-1) - delta(i, j-1);
    end
end
% fprintf('%0.5f', delta)
[m1, n1] = size(delta);
format = [repmat('%0.5f ', 1, n1-1), '%0.5f\n'];
fprintf(format, delta);
% 计算插值结果
m = length(x_interp);
y_interp = zeros(size(x_interp));
for k = 1:m
```

```

% 计算  $s = (x - x_0)/h$ 
s = (x_interp(k) - x(1)) / h;

% 使用牛顿前向插值公式
result = delta(1,1);
product = 1;
for i = 1:pn
    product = product * (s - i + 1) / i;
    result = result + product * delta(1, i+1);
    %delta(1, i+1)
end
y_interp(k) = result;
end
end

```

编写牛顿后插公式的 MATLAB 文件 newton_backward_interpolation.m 如下。

```

function yi = newton_backward_interpolation(x, y, xi, pn)
% 牛顿后插公式
% 输入:
%   x - 等距节点的 x 坐标向量
%   y - 对应节点的函数值向量
%   xi - 需要插值的点
% 输出:
%   yi - 在 xi 处的插值结果

% 参数检查
if nargin ~= 4
    error('需要 3 个输入参数: x, y, xi, pn');
end
if length(x) ~= length(y)
    error('x 和 y 的长度必须相同');
end
n = length(x);
% 检查节点是否等距
h = diff(x);
if any(abs(h - h(1)) > 1e-10)
    error('节点必须等距');
end
h = h(1);
% 计算向后差分表
backward_diff = zeros(n, n);
backward_diff(:,1) = y(:);
for j = 2:n
    for i = n:-1:j
        backward_diff(i,j) = backward_diff(i,j-1) - backward_diff(i-1,j-1);
    end
end
end
% 显示差分表(可选)
fprintf('向后差分表:\n');
display_difference_table(x, backward_diff);
% 计算插值

```

```

t = (xi - x(end)) / h; % 使用最后一个节点作为基准
% 应用牛顿后插公式
yi = backward_diff(n,1);
product = 1;
for i = 1:pn-1
    product = product * (t + i - 1);
    yi = yi + (product / factorial(i)) * backward_diff(n,i+1);
end
fprintf('插值结果: f(%.6f) = %.8f\n', xi, yi);
end
function display_difference_table(x, diff_table)
% 显示差分表
n = length(x);
fprintf('x\t\ty\t\t');
for i = 1:n-1
    fprintf('∇^%dy\t\t', i);
end
fprintf('\n');
for i = 1:n
    fprintf('%.4f\t', x(i));
    for j = 1:i
        fprintf('%.6f\t', diff_table(i,j));
    end
    fprintf('\n');
end
fprintf('\n');
end
end

```

例 5.5 设 $y = f(x) = e^x$, 插值节点为 $x = 1, 1.5, 2, 2.5, 3$, 用三次插值多项式求 $f(1.2)$ 和 $f(2.8)$ 的近似值。

解：相应的函数值和向前差分表如表 5.7 所示。

表 5.7 例 5.5 函数值和向前差分表

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
1	2.71828	1.76341	1.04396	1.04210	-0.11854
1.5	4.48169	2.80737	2.08606	0.92356	
2	7.28906	4.89343	3.00962		
2.5	12.18249	7.90305			
3	20.08554				

用牛顿前插公式求 $f(1.2)$, 此时 $x_0=1, h=0.5, x=1.2=1+0.4h$, 故 $t=0.4$, 于是

$$N_3(1, 2) = 2.71828 + 0.4 \times 1.76341 + \frac{1}{2!} \times 0.4 \times (0.4 - 1) \times 1.04396 + \frac{1}{3!} \times 0.4 \times (0.4 - 1) \times (0.4 - 2) \times 1.04210$$

$$\approx 3.36506$$

调用 newton_forward_interp.m 文件求解例 5.5 中的 $f(1.2)$ 的程序如下。

```
x=[1 1.5 2 2.5 3];
y=[2.71828 4.48169 7.28906 12.18249 20.08554];
x_interp=1.2;
pn=3;
y_interp = newton_forward_interp(x, y, x_interp,pn)
```

运行结果如下。

```
delta =

2.71828    1.76341    1.04396    1.04210   -0.11854
4.48169    2.80737    2.08606    0.92356    0.00000
7.28906    4.89343    3.00962    0.00000    0.00000
12.18249    7.90305    0.00000    0.00000    0.00000
20.08554    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000

y_interp =
    3.365063200000
```

向后差分表如表 5.8 所示。

表 5.8 例 5.5 函数值和向后差分表

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$	$\nabla^4 f_i$
1	2.71828				
1.5	4.48169	1.76341			
2	7.28906	2.80737	1.04396		
2.5	12.18249	4.89343	2.08606	1.04210	
3	20.08554	7.90305	3.00962	0.92356	-0.11854

用牛顿后插公式求 $f(2.8)$, 此时 $x_n = 3, x = 2.8 = 3 - 0.4h$, 故 $t = -0.4$, 于是

$$\begin{aligned}
 N_3(2.8) &= 20.08554 + (-0.4) \times 7.90305 + \frac{1}{2!} \times (-0.4) \times (-0.4 + 1) \times 3.00962 + \\
 &\quad \frac{1}{3!} \times (-0.4) \times (-0.4 + 1) \times (-0.4 + 2) \times 0.92356 \\
 &= 16.504057
 \end{aligned}$$

调用 newton_backward_interpolation.m 文件求解 $f(2.8)$ 的程序如下。

```
x=[1 1.5 2 2.5 3];
y=[2.71828 4.48169 7.28906 12.18249 20.08554];
xi=2.8;
pn=3;
yi = newton_backward_interpolation(x, y, xi, pn)
```

运行结果如下。

```
向后差分表:
x      y      ∇^1y      ∇^2y      ∇^3y      ∇^4y
1.0000 2.718280
1.5000 4.481690  1.763410
2.0000 7.289060  2.807370  1.043960
2.5000 12.182490  4.893430  2.086060  1.042100
3.0000 20.085540  7.903050  3.009620  0.923560  -0.118540

插值结果: f(2.800000) = 16.50405776

yi =

    16.504057759999998
```

5.5 埃尔米特插值

前面讨论的拉格朗日和牛顿插值多项式只要求在节点上与被插值函数的函数值相等,在许多实际问题中,为使插值函数更好地逼近原来的函数,不仅要求二者在节点上有相同的函数值,还要求在节点上有相同的一阶、二阶甚至更高阶导数值,这就是埃尔米特插值问题。本节主要讨论在节点处插值函数与被插值函数有相同的函数值和一阶导数值的埃尔米特插值问题。

5.5.1 埃尔米特插值公式

设在节点 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ 上 $y_i = f(x_i)$, $m_i = f'(x_i)$ ($i=0, 1, \cdots, n$), 要求一个插值多项式 $H(x)$ 满足条件:

$$H(x_i) = y_i, \quad H'(x_i) = m_i \quad (i=0, 1, \cdots, n) \quad (5.42)$$

满足条件式(5.42)的多项式 $H(x)$ 称为埃尔米特插值多项式。

可以看到,这里有 $2n+2$ 个条件,可唯一确定出一个次数不超过 $2n+1$ 的多项式 $H(x)$ 。仿照拉格朗日插值,仍采用构造插值基函数的方法来求埃尔米特插值多项式 $H(x)$ 。

设有两组函数 $h_i(x)$, $H_i(x)$ ($i=0, 1, \cdots, n$), 它们满足:

(1) $h_i(x)$, $H_i(x)$ ($i=0, 1, \cdots, n$) 都是至多 $2n+1$ 次的多项式。

$$(2) \quad h_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j=i \\ 0, & j \neq i \end{cases}, \quad h'_i(x_j) = 0 \quad (i, j=0, 1, \cdots, n). \quad (5.43)$$

$$(3) \quad H_i(x_j) = 0, \quad H'_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j=i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \quad (i, j=0, 1, \cdots, n).$$

则多项式 $H(x) = \sum_{i=0}^n [y_i h_i(x) + m_i H_i(x)]$ 满足条件式(5.42), 且次数不超过 $2n+1$ 。

下面寻求 $h_i(x)$ 和 $H_i(x)$ ($i=0, 1, \cdots, n$)。

按条件式(5.43), 在 x_j ($j \neq i$) 处都有 $h_i(x_j) = h'_i(x_j) = 0$, 所以 $h_i(x)$ 应含因子 $(x-x_j)^2$ ($j \neq i$), 因此可设 $h_i(x) = (ax+b)l_i^2(x)$, 其中, $l_i(x)$ 为拉格朗日插值基函数。由条件式(5.43), 有

$$\begin{cases} h_i(x_i) = ax_i + b = 1 \\ h'_i(x_i) = al_i^2(x_i) + (ax_i + b) \cdot 2l_i(x_i)l'_i(x_i) = 0 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} ax_i + b = 1 \\ a + 2l'_i(x_i) = 0 \end{cases}$$

解得

$$a = -2l'_i(x_i), \quad b = 1 + 2x_i l'_i(x_i)$$

由于 $l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$, $l'_i(x_i) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k}$,

于是

$$h_i(x) = [1 - 2(x - x_i)l'_i(x_i)]l_i^2(x) = \left[1 - 2(x - x_i) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k}\right]l_i^2(x) \quad (5.44)$$

同理可得

$$H_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x) \quad (5.45)$$

于是

$$H(x) = \sum_{i=0}^n \{ [1 - 2(x - x_i)l'_i(x_i)]l_i^2(x)y_i + (x - x_i)l_i^2(x)m_i \} \quad (5.46)$$

特别地, 当 $n=1$ 时, 有

$$\begin{aligned} h_0(x) &= \left(1 + 2 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 \\ h_1(x) &= \left(1 + 2 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 \\ H_0(x) &= (x - x_0) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 \\ H_1(x) &= (x - x_1) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 \end{aligned}$$

所以, 两个节点的三次埃尔米特插值多项式为

$$\begin{aligned} H(x) &= \left(1 + 2 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 y_0 + \left(1 + 2 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 y_1 + \\ &\quad (x - x_0) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 m_0 + (x - x_1) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 m_1 \end{aligned} \quad (5.47)$$

5.5.2 埃尔米特插值的唯一性及余项

定理 5.3 满足插值条件式(5.42)的不超过 $2n+1$ 次的埃尔米特插值多项式是唯一的。

证明: 用反证法。假设 $H(x)$ 和 $\bar{H}(x)$ 都是满足条件式(5.42)的 $2n+1$ 次埃尔米特插值多项式, 于是 $\varphi(x) = H(x) - \bar{H}(x)$ 在每个节点 x_k 上有二重根, 即 $\varphi(x)$ 有 $2n+2$ 重根。但 $\varphi(x)$ 是次数不高于 $2n+1$ 次的多项式, 故 $\varphi(x) \equiv 0$, 唯一性得证。

定理 5.4(余项定理) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $2n+2$ 次连续可导, 则对任意 $x \in [a, b]$, 埃尔米特插值余项为

$$R(x) = f(x) - H(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x), \xi \in (a, b) \quad (5.48)$$

作辅助函数 $\varphi(t) = f(t) - H(t) - \frac{R(x)}{\omega_{n+1}^2(x)} \omega_{n+1}^2(t)$, 读者可仿照拉格朗日插值余项证明的方法自行证明此定理。

特别地, 两点三次埃尔米特插值余项为 $R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x-x_0)^2 (x-x_1)^2$ 。

埃尔米特插值法的 MATLAB 文件 hermite_interp.m 如下。

```
function y_interp = hermite_interp(x, y, dy, x_interp)
% 埃尔米特插值函数
% 输入:
%   x - 已知点的 x 坐标向量
%   y - 已知点的 y 坐标向量
%   dy - 已知点的导数值向量
%   x_interp - 需要插值的 x 坐标点
% 输出:
%   y_interp - 插值结果

n = length(x);
m = length(x_interp);
y_interp = zeros(size(x_interp));

for k = 1:m
    H = 0;
    for i = 1:n
        % 计算拉格朗日基函数及其导数
        L_i = 1;
        L_i_prime = 0;

        for j = 1:n
            if j ~= i
                L_i = L_i * (x_interp(k) - x(j)) / (x(i) - x(j));

                % 计算 L_i'(x_i)
                term = 1 / (x(i) - x(j));
                for l = 1:n
                    if l ~= i && l ~= j
                        term = term * (x(i) - x(l)) / (x(i) - x(l));
                    end
                end
                L_i_prime = L_i_prime + term;
            end
        end

        % 计算埃尔米特插值基函数
        A_i = (1 - 2 * (x_interp(k) - x(i)) * L_i_prime) * L_i^2;
        B_i = (x_interp(k) - x(i)) * L_i^2;

        % 累加各项
        H = H + y(i) * A_i + dy(i) * B_i;
    end
    y_interp(k) = H;
end
end
```

例 5.6 给定数据表如表 5.9 所示。

表 5.9 例 5.6 数据表

x_i	1	2
$f(x_i)$	2	3
$f'(x_i)$	0	-1

构造埃尔米特插值多项式 $H(x)$, 并计算 $f(1.5)$ 。

解: 设 $x_0 = 1, x_1 = 2$, 用基函数方法构造 $H(x)$ 。基函数 $h_0(x) = \left(1 + 2 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right) \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 = (2x-1)(x-2)$, $h_1(x) = \left(1 + 2 \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right) \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 = (5-2x)(x-1)^2$, $H_0(x) = (x-x_0) \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 = (x-1)(x-2)^2$, $H_1(x) = (x-x_1) \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 = (x-2)(x-1)^2$, 于是有 $H(x) = 2h_0(x) + 3h_1(x) - H_1(x) = -3x^3 + 13x^2 - 17x + 9$, $f(1.5) \approx H(1.5) = 2.625$ 。

调用 hermite_interp.m 文件求解例 5.6 的程序如下。

```
x=[1 2];
y=[2 3];
dy=[0 -1];
x_interp=1.5;
y_interp = hermite_interp(x, y, dy, x_interp)
```

运行结果如下。

```
y_interp =
2.62500
```

【数理哲人】

夏尔·埃尔米特——埃尔米特插值、埃尔米特多项式

夏尔·埃尔米特(Charles Hermite, 1822—1901 年), 1822 年出生于法国迪约兹。他天生右腿畸形, 终身行走不便。但这并未阻碍他的求知欲。他早年在家接受教育, 后进入巴黎路易大帝中学学习。在中学时期, 他的数学天赋就显露无遗。他不仅掌握了当时的数学知识, 甚至还开始独立阅读拉格朗日和高斯等大师的著作。1942 年, 他考入著名的巴黎综合理工学院。然而, 他的学术道路并非一帆风顺。因为他拒绝接受不符合他兴趣的课程, 学校当局曾威胁要开除他。最终, 他因残疾免于参加强制性的军事训练, 得以继续学业。在此期间, 他深入研究了卡尔·雅可比关于椭圆函数的工作, 这对他未来的研究产生了决定性影响。可以说他是雅可比在法国学派的继承者。他首次证明自然对数的底数 e 不是一个代数数(即不是任何整系数多项式的根), 而是超越数(1873 年), 这是一个里程碑式的成果。他研究了一类经典的正交多项式, 应用数学家们利用这种正交性, 发展出了高斯-埃尔米特积分公式, 这种正交多项式被命名为“埃尔米特多项式”。他提出了埃尔米特插值, 这种插值提供了比一般多项式插值更高阶的光滑性。它不仅能模拟函数的变化趋势, 还能模拟函数变

化的“速度”(导数),因此在需要高精度近似或保证光滑连接的场景中非常有用。另外,埃尔米特在椭圆函数与模函数研究上的工作深刻影响了 19 世纪的函数论发展,在微分几何中也有以他名字命名的概念。夏尔·埃尔米特是一位承前启后的数学巨人。他的一生跨越了整个 19 世纪,他的工作从最纯粹的数论到具有极强应用背景的正交多项式,为现代数学的多个分支奠定了基础。

5.6 分段低次插值

5.6.1 高次插值与龙格现象

根据区间 $[a, b]$ 上给出的节点构造插值多项式 $L_n(x)$ 近似 $f(x)$ 时,人们往往认为增加节点个数、提高 $L_n(x)$ 的次数,逼近程度会更好,而实际上并非如此。高次插值的逼近效果往往并不理想。这是因为对于任意的插值节点,当 $n \rightarrow \infty$ 时, $L_n(x)$ 不一定收敛到 $f(x)$ 。

20 世纪初,龙格(Runge)考查函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} (-5 \leq x \leq 5)$,它在 $[-5, 5]$ 上各阶导数均存在。取等距节点 $x_k = -5 + kh \left(h = \frac{10}{n}, k = 0, 1, \dots, n \right)$,所构造的拉格朗日插值多项式为

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{1+x_i^2} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x)}$$

$L_{10}(x)$ 和 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在区间 $[-5, 5]$ 上的图形如图 5.4 所示。

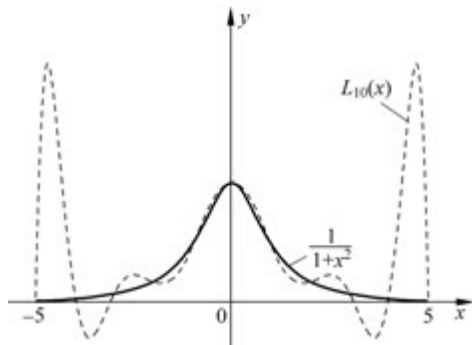


图 5.4 $L_{10}(x)$ 和 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在 $[-5, 5]$ 上的图形

从图 5.4 可以看出,在 $x = \pm 5$ 附近, $L_{10}(x)$ 与 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 偏差很大。例如, $L_{10}(\pm 4.8) = 1.80438$, 而 $f(\pm 4.8) = 0.04160$ 。事实上可以证明,在等距节点条件下,当 $|x| \leq 3.63$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) = f(x)$ 。而当 $|x| > 3.63$ 时, $\{L_n(x)\}$ 发散。人们把这种高次插值不收敛的现象叫作**龙格现象**。

龙格现象说明,加密节点或大范围内使用高次插值,逼近效果往往不理想。从该例还可

以看到,如果把 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在节点 $x=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ 处用折线连起来,显然比 $L_{10}(x)$ 逼近 $f(x)$ 好得多。这正是分段低次插值的出发点。

5.6.2 分段线性插值

分段低次插值就是将插值区间 $[a, b]$ 分成若干子区间,在每个子区间上采用低次插值多项式逼近 $f(x)$ 。最简单的分段插值是分段线性插值和分段三次埃尔米特插值。

定义 5.5 设 $y=f(x)$ 在已知节点 $a=x_0 < x_1 < \cdots < x_n=b$ 上的函数值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 。记 $h_i = x_{i+1} - x_i$, $h = \max_i h_i$, 称 $I_h(x)$ 为分段线性插值函数,如果满足:

- (1) $I_h(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。
- (2) $I_h(x_i) = y_i$ ($i=0, 1, \cdots, n$)。
- (3) $I_h(x)$ 在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是线性函数。

分段线性插值的几何意义是在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上,将插值点用直线段连起来,从而在整个区间 $[a, b]$ 上用折线段逼近 $f(x)$ 。

根据定义, $I_h(x)$ 在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上可表示为下列线性函数,即

$$I_h(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad (i=0, 1, \cdots, n) \quad (5.50)$$

若用插值基函数表示,则 $I_h(x)$ 在整个区间 $[a, b]$ 上可表示为

$$I_h(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x) \quad (5.51)$$

其中,基函数 $l_i(x)$ 满足条件 $l_i(x_k) = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$ ($i, k=0, 1, \cdots, n$), 其形式是

$$l_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (i=0 \text{ 舍去}) \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (i=n \text{ 舍去}) \\ 0, & x \in [a, b] \text{ 且 } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \quad (5.52)$$

分段线性插值基函数 $l_i(x)$ 只在 x_i 附近不为零,在其他地方均为零,这种性质称为局部非零性质。当插值点有误差时,这种局部非零性质将误差控制在一个局部区域内。

定理 5.5 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶连续可导,则分段线性插值函数 $I_h(x)$ 的余项有以下估计

$$|R(x)| = |f(x) - I_h(x)| \leq \frac{h^2}{8} M \quad (5.53)$$

其中, $h = \max_{0 \leq i \leq n-1} |x_{i+1} - x_i|$, $M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ 。

证明: 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ ($i=0, 1, \cdots, n-1$) 上, $I_h(x)$ 是 $f(x)$ 的线性插值,故由式(5.20),对任意 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 有

$$R(x) = f(x) - I_h(x) = \frac{f''(\xi)}{2} (x - x_i)(x - x_{i+1}), \quad \xi \in (x_i, x_{i+1})$$

又因为

$$(x - x_i)(x - x_{i+1}) = \left(x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)^2 - \frac{(x_i - x_{i+1})^2}{4} \leq 0$$

因而

$$\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |(x - x_i)(x - x_{i+1})| = \frac{(x_i - x_{i+1})^2}{4}$$

于是

$$|R(x)| \leq \frac{|f''(\xi)|}{2} \cdot \frac{(x_i - x_{i+1})^2}{4} \leq \frac{(x_i - x_{i+1})^2}{8} \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)|$$

所以对于任意 $x \in [a, b]$, 都有

$$|R(x)| \leq \max_{0 \leq i \leq n-1} \left\{ \frac{(x_i - x_{i+1})^2}{8} \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)| \right\} \leq \frac{h^2}{8} M$$

例 5.7 已知函数 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 的一组数据如表 5.10 所示。

表 5.10 例 5.7 数据

x_i	1	2	3
y_i	0.5	0.2	0.1

求分段线性插值函数, 并计算 $f(2.5)$ 的近似值。

解: $x \in [1, 2]$ 时, $I_h(x) = \frac{x-2}{1-2} \times 0.5 + \frac{x-1}{2-1} \times 0.2 = -\frac{3}{10}x + \frac{4}{5}$ 。

$x \in [2, 3]$ 时, $I_h(x) = \frac{x-3}{2-3} \times 0.2 + \frac{x-2}{3-2} \times 0.1 = -\frac{1}{10}x + \frac{2}{5}$ 。

于是有分段线性插值函数

$$I_h(x) = \begin{cases} -\frac{3}{10}x + \frac{4}{5}, & x \in [1, 2] \\ -\frac{1}{10}x + \frac{2}{5}, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

则 $f(2.5) \approx I_h(2.5) = -\frac{1}{10} \times 2.5 + \frac{2}{5} = 0.15$ 。

5.6.3 分段三次埃尔米特插值

分段线性插值函数计算简单, 但在节点处导数不存在, 光滑性差。若还要考虑节点处导数和插值函数的导数也相等, 则可进行分段埃尔米特插值。

定义 5.6 设 $y = f(x)$ 在已知节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 上的函数值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$, 导数值是 $m_0, m_1, \cdots, m_n$ 。构造函数 $I_h(x)$, 使它满足:

- (1) $I_h(x)$ 为区间 $[a, b]$ 上一阶导数连续的函数。
- (2) $I_h(x_i) = y_i, I_h'(x_i) = m_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 。
- (3) $I_h(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}] (i = 0, 1, \cdots, n)$ 上是三次多项式。

则称 $I_h(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的分段三次埃尔米特插值函数。

根据式(5.47)可知, $I_h(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的表达式为

$$I_h(x) = \left(1 + 2 \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 y_i + \left(1 + 2 \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right) \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 y_{i+1} + (x - x_i) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 m_i + (x - x_{i+1}) \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 m_{i+1} \quad (5.54)$$

若在整个区间 $[a, b]$ 上定义一组分段三次插值基函数 $h_i(x)$ 及 $H_i(x)$ ($i=0, 1, \dots, n$), 则 $I_h(x)$ 可表示为

$$I_h(x) = \sum_{i=0}^n [h_i(x) y_i + H_i(x) m_i] \quad (5.55)$$

其中, $h_i(x)$ 、 $H_i(x)$ 可表示为

$$h_i(x) = \begin{cases} \left(1 + 2 \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}\right) \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ (} i=0 \text{ 舍去)} \\ \left(1 + 2 \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \text{ (} i=n \text{ 舍去)} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.56)$$

$$H_i(x) = \begin{cases} (x - x_i) \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ (} i=0 \text{ 舍去)} \\ (x - x_i) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \text{ (} i=n \text{ 舍去)} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.57)$$

根据 $h_i(x)$ 及 $H_i(x)$ 的局部非零性质, 当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 时, 只有 $h_i(x)$, $h_{i+1}(x)$, $H_i(x)$, $H_{i+1}(x)$ 不为 0, 于是式(5.55)可表示为

$$I_h(x) = h_i(x) y_i + h_{i+1}(x) y_{i+1} + H_i(x) m_i + H_{i+1}(x) m_{i+1}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (5.58)$$

分段三次埃尔米特插值的余项可以由两点三次埃尔米特多项式的插值余项得到。

定理 5.6 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上四阶导数存在, 则当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 时, 分段三次埃尔米特插值函数 $I_h(x)$ 的余项为

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2, \quad \xi \in [x_i, x_{i+1}] \quad (5.59)$$

且对任意 $x \in [a, b]$ 有以下估计:

$$|R(x)| = |f(x) - I_h(x)| \leq \frac{h^4}{384} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \quad (5.60)$$

其中, $h = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$ 。

【数理哲人】

卡尔·龙格——龙格现象、龙格-库塔法

卡尔·龙格(Carl David Tolmé Runge, 1856—1927 年), 1856 年出生于德国不来梅, 是德国数学家和物理学家。早年对文学和语言学表现出兴趣, 但后来转向了数学和物理学。

师从著名数学家卡尔·魏尔斯特拉斯和利奥波德·克罗内克。1880年,在柏林大学获得数学博士学位。1886年,他成为汉诺威大学的教授,并在那里工作了18年。1904年,在著名数学家菲利克斯·克莱因的邀请下,他前往哥廷根大学担任应用数学教授。这使得哥廷根大学成为当时世界数学和物理学的中心之一。在哥廷根,他的兴趣扩展到光谱学,他与实验物理学家合作,为光谱分析奠定了数学基础。

龙格的工作横跨多个领域,但他在数值分析方面的贡献最为人所熟知,主要有以下两点。一是龙格-库塔法,这是龙格最著名的贡献,也是至今为止求解常微分方程初值问题最常用、最重要的一类方法。龙格提出了利用泰勒展开和函数在不同点的斜率值的线性组合来构造更高精度公式的思想。后来,他的学生马丁·威尔海姆·库塔将这一思想一般化,形成了现在通用的龙格-库塔法。其中最经典的是四阶龙格-库塔法,它在计算精度和效率之间取得了极佳的平衡,被称为“工作马”方法,被广泛应用于从天体力学到流体模拟的各个领域。几乎所有科学计算软件包都内置了该方法。二是龙格现象。他发现了当使用高次多项式对某些函数在等距节点上进行插值时,在区间的边缘会出现严重的振荡现象,导致插值多项式与原始函数产生巨大的偏差。插值多项式的次数越高,这种振荡和偏差反而可能越大。这被称为龙格现象。龙格现象深刻地揭示了高次多项式插值的缺陷,它告诫人们并非插值次数越高越好。这一发现直接促进了其他更稳健的近似方法的发展,如分段低次插值、切比雪夫节点插值等。卡尔·龙格是一位从纯粹数学转向应用数学的科学家典范。他的工作完美地体现了理论数学与工程应用的结合。龙格-库塔法提供了一把强大的钥匙,解锁了用计算机求解复杂微分方程的大门。龙格现象则是一个重要的警示,它揭示了数值计算中可能存在的陷阱,推动了这个领域向着更严谨、更可靠的方向发展。正因为这两大贡献,卡尔·龙格的名字被永久地镌刻在数值分析和科学计算的史册中,成为每一位学习该领域的学生都无法绕开的关键人物。

5.7 三次样条插值

前面讨论的分段低次插值函数都具有一致收敛性,但光滑性较差。例如,分段线性插值函数在节点处导数不存在,分段三次埃尔米特插值函数仅具有一阶光滑度,而且需要提供节点处的导数值。在实际工程中,有些问题对插值函数的光滑性有更高要求,如飞机的机翼外形、内燃机进排气门的凸轮曲线,都要求曲线具有二阶光滑度,即二阶导数连续,也就是不仅要求函数曲线连续,还要有连续的曲率。为了解决这类问题,样条插值产生了。

早期工程师在制图时,把细长且富有弹性的小木条(样条)在样点用压铁固定住,其他地方自由弯曲,样条在自然弹性弯曲下形成的光滑曲线称为样条曲线。该曲线不仅有连续的一阶导数,还有连续的曲率(即具有二阶连续导数)。1946年,舍恩伯格(I. J. Schoenberg)把样条曲线引入数学中,构造了样条函数的概念,在20世纪60年代受到广大计算数学工作者的重视,他们对样条函数进行了理论研究并应用到数值分析的各个领域,这种应用取得了惊人的效果,使得样条函数成为现代数值分析中的重要概念和有用工具。下面将介绍最简单也是最常用的三次样条插值函数。

5.7.1 三次样条插值函数

定义 5.7 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的 $n+1$ 个节点 $a=x_0 < x_1 < \cdots < x_n=b$ 上的函数值 $y_i=f(x_i)$, 若函数 $S(x)$ 满足

$$(1) S(x_i)=y_i (i=0, 1, \cdots, n)。$$
 (5.61)

$$(2) S(x) \in C^2[a, b]。$$

$$(3) \text{ 在每个小区间 } [x_i, x_{i+1}] (i=0, 1, \cdots, n-1) \text{ 上, } S(x) \text{ 是 } x \text{ 的三次多项式。}$$

则称 $S(x)$ 是 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的三次样条插值函数。

从定义 5.7 可以看到, 每个子区间上的多项式可以不同。要求出 $S(x)$, 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上要确定 4 个待定系数, 一共有 n 个小区间, 所以应确定 $4n$ 个参数。根据条件 $S(x) \in C^2[a, b]$, 在节点 $x_i (i=1, 2, \cdots, n-1)$ 应满足:

$$S(x_i-0)=S(x_i+0)$$

$$S'(x_i-0)=S'(x_i+0)$$

$$S''(x_i-0)=S''(x_i+0)$$

共有 $3n-3$ 个条件, 再加上插值条件式(5.61), 共有 $4n-2$ 个条件, 因此还需要两个条件才能确定 $S(x)$ 。通常在区间 $[a, b]$ 的端点 $a=x_0, b=x_n$ 上各加一个条件(称为边界条件), 边界条件可根据实际问题的要求给定, 常见的有以下三种。

(1) 已知端点的一阶导数值, 即

$$S'(x_0)=y'_0, \quad S'(x_n)=y'_n$$
 (5.62)

(2) 已知端点的二阶导数值, 即

$$S''(x_0)=y''_0, \quad S''(x_n)=y''_n$$
 (5.63)

其特殊情形

$$S''(x_0)=0, \quad S''(x_n)=0$$
 (5.64)

称为自然边界条件。

(3) 当 $f(x)$ 是以 x_n-x_0 为周期的周期函数时, 则要求 $S(x)$ 也是以 x_n-x_0 为周期的周期函数, 这时边界条件应满足

$$\begin{cases} S(x_0+0)=S(x_n-0) \\ S'(x_0+0)=S'(x_n-0) \\ S''(x_0+0)=S''(x_n-0) \end{cases}$$
 (5.65)

此时 $y_0=y_n$, 这样确定的样条函数 $S(x)$ 称为周期样条函数。

5.7.2 三转角方程

设 $S'(x_i)=m_i (i=0, 1, \cdots, n)$, 因为 $S(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上都是三次多项式, 因此可以将 $S(x)$ 表示成整个区间上的分段两点三次埃尔米特插值多项式, 即

$$S(x)=\sum_{i=0}^n [y_i h_i(x) + m_i H_i(x)]$$
 (5.66)

其中, $h_i(x)$ 及 $H_i(x)$ 是插值基函数, 由式(5.56)和式(5.57)表示。

当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $h_i = x_{i+1} - x_i$ 时,

$$S(x) = \left(1 + 2 \frac{x - x_i}{h_i}\right) \left(\frac{x - x_{i+1}}{-h_i}\right)^2 y_i + \left(1 + 2 \frac{x - x_{i+1}}{-h_i}\right) \left(\frac{x - x_i}{h_i}\right)^2 y_{i+1} + (x - x_i) \left(\frac{x - x_{i+1}}{-h_i}\right)^2 m_i + (x - x_{i+1}) \left(\frac{x - x_i}{h_i}\right)^2 m_{i+1} \quad (5.67)$$

$S(x)$ 、 $S'(x)$ 在整个区间 $[a, b]$ 上连续,且满足插值条件式(5.61)。

然而在式(5.67)中 m_i ($i=0, 1, \dots, n$) 是未知的,它可利用 $S''(x_i+0) = S''(x_i-0)$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) 及边界条件式(5.62)或式(5.63)求出。下面讨论 m_i ($i=0, 1, \dots, n$) 的求法。

由式(5.67), $S''(x) = \frac{6x - 2x_i - 4x_{i+1}}{h_i^2} m_i + \frac{6x - 4x_i - 2x_{i+1}}{h_i^2} m_{i+1} + \frac{6(x_i + x_{i+1} - 2x)}{h_i^3} (y_{i+1} - y_i)$, 于是 $S''(x_i+0) = -\frac{4}{h_i} m_i - \frac{2}{h_i} m_{i+1} + \frac{6}{h_i^2} (y_{i+1} - y_i)$, 同理可得在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, $S''(x) = \frac{6x - 2x_{i-1} - 4x_i}{h_{i-1}^2} m_{i-1} + \frac{6x - 4x_{i-1} - 2x_i}{h_{i-1}^2} m_i + \frac{6(x_{i-1} + x_i - 2x)}{h_{i-1}^3} (y_i - y_{i-1})$ 以及 $S''(x_i-0) = \frac{2}{h_{i-1}} m_{i-1} + \frac{4}{h_{i-1}} m_i - \frac{6}{h_{i-1}^2} (y_i - y_{i-1})$, 由条件 $S''(x_i+0) = S''(x_i-0)$ ($i=1, 2, \dots, n-1$), 可得

$$\frac{1}{h_{i-1}} m_{i-1} + 2\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right) m_i + \frac{1}{h_i} m_{i+1} = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}^2}\right) \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (5.68)$$

用 $\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}$ 除全式, 并化简所得方程得

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = g_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (5.69)$$

其中,

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}, \quad \mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (5.70)$$

$$g_i = 3(\lambda_i f[x_{i-1}, x_i] + \mu_i f[x_i, x_{i+1}]) \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (5.71)$$

式(5.69)是含有 $n-1$ 个方程, $n+1$ 个未知数 m_i ($i=0, 1, \dots, n$) 的方程组。其中每一个方程都含有 $S(x)$ 在相邻三个节点上的一阶导数值 m_i , m_i 在力学上的意义为细梁在 x_i 截面处的转角, 因此式(5.69)也称为**三转角方程**。为了确定未知数 m_i ($i=0, 1, \dots, n$), 还需要补充两个边界条件。下面分别对三种边界条件进行讨论。

(1) 如果边界条件为 $S'(x_0) = y'_0$, $S'(x_n) = y'_n$, 式(5.69)成为只含 $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ 的 $n-1$ 个方程, 写成矩阵形式便是

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \lambda_1 y'_0 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} y'_n \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

(2) 如果边界条件是 $S''(x_0) = y_0'', S''(x_n) = y_n''$, 则可得

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = 3f[x_0, x_1] - \frac{h_0}{2}y_0'' = g_0 \\ m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n] + \frac{h_{n-1}}{2}y_n'' = g_n \end{cases} \quad (5.73)$$

如果边界条件是 $S''(x_0) = 0, S''(x_n) = 0$, 则可得

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = 3f[x_0, x_1] = g_0 \\ m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n] = g_n \end{cases} \quad (5.74)$$

于是, 式(5.69)与方程组(5.73)或方程组(5.74)合并后用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

(3) 如果边界条件是周期性条件式(5.65), 则 $m_0 = m_n$, 可得

$$\mu_n m_1 + \lambda_n m_{n-1} + 2m_n = g_n \quad (5.76)$$

其中,

$$\mu_n = \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \quad \lambda_n = \frac{h_0}{h_0 + h_{n-1}}, \quad g_n = 3(\mu_n f[x_0, x_1] + \lambda_n f[x_{n-1}, x_n]) \quad (5.77)$$

式(5.69)与式(5.76)合并后用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & & & & \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

方程组(5.72)、方程组(5.75)和方程组(5.78)的系数矩阵都是严格对角占优的三对角矩阵, 可以用追赶法求其唯一的解。将解代入式(5.67)即可得三次样条插值函数。

三转角方程求解三次样条插值函数的 MATLAB 文件 cubic_spline_three_moment.m 如下。

```
function [spline_coeff, interpolated_values] = cubic_spline_three_moment(x, y, xi, boundary_type,
boundary_values)
% 三转角方程法求三次样条插值函数
% 输入:
%   x - 节点 x 坐标向量 (n+1 个点)
%   y - 节点函数值向量
%   xi - 需要插值的点 (标量或向量)
```

```

% boundary_type - 边界条件类型:
%         'natural' - 自然边界条件 ( $M_0 = M_n = 0$ )
%         'clamped' - 固定边界条件 (给定一阶导数)
%         'not-a-knot' - 非节点边界条件
% boundary_values - 边界值 [左边界值, 右边界值] (对于 clamped 边界条件)
% 输出:
% spline_coeff - 样条系数矩阵 ( $n \times 4$ )
% interpolated_values - 在 xi 处的插值结果

% 参数检查
if nargin < 4
    boundary_type = 'natural';
end

if nargin < 5
    boundary_values = [0, 0];
end

n = length(x) - 1;           % 区间个数
if length(y) ~= n+1
    error('x 和 y 的长度必须相同');
end

% 计算步长
h = diff(x);
% 建立三转角方程组
A = zeros(n+1, n+1);
b = zeros(n+1, 1);
% 内部节点方程 (i=1 到 n-1)
for i = 2:n
    A(i, i-1) = h(i-1);
    A(i, i) = 2 * (h(i-1) + h(i));
    A(i, i+1) = h(i);
    b(i) = 6 * ((y(i+1) - y(i)) / h(i) - (y(i) - y(i-1)) / h(i-1));
end

% 边界条件
switch boundary_type
case 'natural'
    % 自然边界条件:  $M_0 = 0, M_n = 0$ 
    A(1, 1) = 1;
    b(1) = 0;
    A(n+1, n+1) = 1;
    b(n+1) = 0;

case 'clamped'
    % 固定边界条件: 给定一阶导数
    A(1, 1) = 2 * h(1);
    A(1, 2) = h(1);
    b(1) = 6 * ((y(2) - y(1)) / h(1) - boundary_values(1));
    A(n+1, n) = h(n);
    A(n+1, n+1) = 2 * h(n);
    b(n+1) = 6 * (boundary_values(2) - (y(n+1) - y(n)) / h(n));
end

```

```

case 'not-a-knot'
    % 非节点边界条件: 第一个和最后一个内部节点处三阶导数连续
    A(1, 1) = h(2);
    A(1, 2) = -(h(1) + h(2));
    A(1, 3) = h(1);
    b(1) = 0;
    A(n+1, n-1) = h(n);
    A(n+1, n) = -(h(n-1) + h(n));
    A(n+1, n+1) = h(n-1);
    b(n+1) = 0;
otherwise
    error('不支持的边界条件类型');
end
% 求解三转角方程组得到二阶导数 M
M = A \ b;
% 计算样条系数
spline_coeff = zeros(n, 4);
for i = 1:n
    spline_coeff(i, 1) = (M(i+1) - M(i)) / (6 * h(i)); % a
    spline_coeff(i, 2) = M(i) / 2; % b
    spline_coeff(i, 3) = (y(i+1) - y(i)) / h(i) - h(i) * (M(i+1) + 2 * M(i)) / 6; % c
    spline_coeff(i, 4) = y(i); % d
end
% 在给定点进行插值
interpolated_values = zeros(size(xi));
for k = 1:length(xi)
    % 找到 xi(k)所在的区间
    idx = find_interval(x, xi(k));

    if isempty(idx)
        if xi(k) < x(1)
            idx = 1; % 左外推
        else
            idx = n; % 右外推
        end
    end
    % 计算插值
    dx = xi(k) - x(idx);
    interpolated_values(k) = spline_coeff(idx, 1) * dx^3 + ...
        spline_coeff(idx, 2) * dx^2 + ...
        spline_coeff(idx, 3) * dx + ...
        spline_coeff(idx, 4);
end
% 显示样条函数
display_spline_functions(x, spline_coeff);
end
function idx = find_interval(x, xi)
% 找到 xi 所在的区间索引
n = length(x) - 1;
for i = 1:n

```

```

        if xi >= x(i) && xi <= x(i+1)
            idx = i;
            return;
        end
    end
    idx = []; % 不在任何区间内
end
function display_spline_functions(x, coeff)
% 显示样条函数表达式
n = size(coeff, 1);
fprintf('\n 三次样条插值函数:\n');
fprintf('=====\n');
for i = 1:n
    a = coeff(i, 1);
    b = coeff(i, 2);
    c = coeff(i, 3);
    d = coeff(i, 4);
    fprintf('在区间 [%f, %f] 上:\n', x(i), x(i+1));
    fprintf('S_%d(x) = ', i-1);
    terms = {};
    if abs(a) > 1e-10
        terms(end+1) = sprintf('%f * (x-%f)^3', a, x(i));
    end
    if abs(b) > 1e-10
        terms(end+1) = sprintf('%f * (x-%f)^2', b, x(i));
    end
    if abs(c) > 1e-10
        terms(end+1) = sprintf('%f * (x-%f)', c, x(i));
    end
    if abs(d) > 1e-10
        terms(end+1) = sprintf('%f', d);
    end
    if isempty(terms)
        fprintf('0');
    else
        fprintf('%s', terms{1});
        for j = 2:length(terms)
            if terms{j}(1) == '-'
                fprintf(' - %s', terms{j}(2:end));
            else
                fprintf(' + %s', terms{j});
            end
        end
    end
    fprintf('\n\n');
end
end
end

```

5.7.3 三弯矩方程

设 $S''(x_i) = M_i$ ($i=0, 1, \dots, n$), 因为 $S(x)$ 在小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是三次多项式, 故 $S''(x)$ 为线性函数, 利用拉格朗日插值公式得

$$S''(x) = M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} - M_i \frac{x - x_{i+1}}{h_i} \quad (5.79)$$

其中, $h_i = x_{i+1} - x_i$ 。将式(5.79)积分两次, 并代入插值条件 $S(x_i) = y_i$ 和 $S(x_{i+1}) = y_{i+1}$ 确定积分常数, 于是有

$$S(x) = M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} - M_i \frac{(x - x_{i+1})^3}{6h_i} + \left(y_{i+1} - \frac{M_{i+1}h_i^2}{6}\right) \frac{x - x_i}{h_i} - \left(y_i - \frac{M_i h_i^2}{6}\right) \frac{x - x_{i+1}}{h_i} \quad (i=0, 1, \dots, n-1) \quad (5.80)$$

对 $S(x)$ 求导得

$$S'(x) = \frac{M_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 - \frac{M_i}{2h_i}(x - x_{i+1})^2 + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i) \quad (5.81)$$

由式(5.81)可求得

$$S'(x_i + 0) = -\frac{h_i}{3}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$$

类似地, 可求出 $S(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的表达式, 从而得

$$S'(x_i - 0) = \frac{h_{i-1}}{3}M_i + \frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

利用 $S'(x_i + 0) = S'(x_i - 0)$, 可得

$$-\frac{h_i}{3}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = \frac{h_{i-1}}{3}M_i + \frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

化简得

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (5.82)$$

其中,

$$\begin{cases} \mu_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} \\ \lambda_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} \\ d_i = 6 \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{h_{i-1} + h_i} = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (5.83)$$

式(5.82)给出了含 $n+1$ 个参数 $M_0, M_1, \dots, M_n$ 的 $n-1$ 个方程, M_i 在力学上的意义是细梁在 x_i 截面处的弯矩, 并且得到的弯矩与相邻两个弯矩有关, 故式(5.82)称为三弯矩方程。

为了确定未知数 M_i ($i=0, 1, \dots, n$), 还需要补充两个边界条件。下面分别对三种边界条件进行讨论。

(1) 如果边界条件为 $S'(x_0) = y'_0, S'(x_n) = y'_n$, 可导出

$$\begin{cases} \frac{h_0}{3}M_0 + \frac{h_0}{6}M_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - y'_0 \\ \frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{3}M_n = -\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} + y'_n \end{cases}$$

改写成

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = d_0 \\ M_{n-1} + 2M_n = d_n \end{cases} \quad (5.84)$$

其中,

$$d_0 = \frac{6}{h_0} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - y'_0 \right), \quad d_n = \frac{6}{h_{n-1}} \left(y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right) \quad (5.85)$$

合并方程组(5.82)和方程组(5.84), 写成矩阵形式便是

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

(2) 如果边界条件是 $S''(x_0) = y''_0 = M_0, S''(x_n) = y''_n = M_n$, 方程组(5.82)只包含 $n-1$ 个未知数 $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$, 方程组可以写成

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 y''_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} y''_n \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

(3) 如果边界条件是周期性条件式(5.65), 可导出

$$\begin{aligned} M_0 &= M_n \\ \lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n &= d_n \end{aligned} \quad (5.88)$$

其中,

$$\mu_n = \frac{h_n}{h_1 + h_n}, \quad \lambda_n = \frac{h_1}{h_1 + h_n} = 1 - \mu_n, \quad d_n = \frac{6}{h_1 + h_n} (f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]) \quad (5.89)$$

式(5.82)和式(5.88)合并写成矩阵形式是

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

可以看到,三类边界条件下得到的方程组的系数矩阵均为严格对角占优阵,因此方程组有唯一解,类似于三转角方程可用追赶法求解。将解代入式(5.80)即可得三次样条插值函数。

例 5.8 已知函数表如表 5.11 所示。

表 5.11 例 5.8 函数表

i	0	1	2	3
x_i	1	2	4	5
$f(x_i)$	1	3	4	2

求满足边界条件 $y'(0) = \frac{17}{8}$, $y'(5) = -\frac{19}{8}$ 的三次样条插值函数,并求 $f(3)$ 和 $f(4.5)$ 的近似值。

解: 由函数表知, $h_0 = x_1 - x_0 = 1$, $h_1 = 2$, $h_2 = 1$, 按式(5.70)和式(5.71)计算可得 $\lambda_1 = \frac{2}{3}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, $\mu_1 = \frac{1}{3}$, $\mu_2 = \frac{2}{3}$, $g_1 = \frac{9}{2}$, $g_2 = -\frac{7}{2}$, 将其代入方程(5.72)得

$$\begin{cases} \frac{2}{3}m_0 + 2m_1 + \frac{1}{3}m_2 = \frac{9}{2} \\ \frac{1}{3}m_1 + 2m_2 + \frac{2}{3}m_3 = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

由于

$$m_0 = y'(0) = \frac{17}{8}, \quad m_3 = y'(5) = -\frac{19}{8}$$

于是有

$$\begin{cases} 2m_1 + \frac{1}{3}m_2 = \frac{37}{12} \\ \frac{1}{3}m_1 + 2m_2 = -\frac{23}{12} \end{cases}$$

其解为

$$m_1 = \frac{7}{4}, \quad m_2 = -\frac{5}{4}$$

将其代入式(5.67),当 $i=0$ 时,得

$$\begin{aligned} S_0(x) &= [1 + 2(x-1)(x-2)^2] \times 1 + [1 - 2(x-2)(x-1)^2] \times 3 + \\ &\quad (x-1)(x-2)^2 \times \frac{17}{8} + (x-2)(x-1)^2 \times \frac{7}{4} \\ &= -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - 1, \quad x \in [1, 2] \end{aligned}$$

同理,可求得在其他子区间上的表达式为

$$S_1(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - 1, \quad x \in [2, 4]$$

$$S_2(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{45}{8}x^2 + \frac{103}{4}x - 33, \quad x \in [4, 5]$$

于是,所求三次样条插值函数的分段表达式为

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - 1, & x \in [1, 4] \\ \frac{3}{8}x^3 - \frac{45}{8}x^2 + \frac{103}{4}x - 33, & x \in [4, 5] \end{cases}$$

由此可求得 $f(3) \approx S_1(3) = \frac{17}{4}$, $f(4.5) \approx S_2(4.5) = \frac{201}{64}$ 。

调用 cubic_spline_three_moment.m 文件求解例 5.8 的程序如下。

```
x = [1, 2, 4, 5];
y = [1 3 4 2]; % 近似抛物线

% 边界一阶导数值
boundary_derivatives = [17/8, -19/8];
% 插值点
xi = [3, 4.5];
% 计算三次样条插值
[coeff, yi] = cubic_spline_three_moment(x, y, xi, 'clamped', boundary_derivatives)
```

运行结果如下。

```
yi =
    4.250000000000000    3.140625000000000
```

三次样条插值的起源——从物理工具到数学方法

三次样条插值的诞生,首先是为了克服高次多项式插值(如拉格朗日插值)的致命缺陷——著名的“龙格现象”,即高阶多项式在数据点间会产生剧烈振荡,无法得到光滑自然的曲线。这一数学问题在工程制图(如船体、机翼设计)中尤为突出,而工程师们当时使用的物理工具——“样条”(一种弹性木条或塑料条),为解决此问题提供了灵感。当用压铁固定关键点后,弯曲的物理样条能自然形成一条能量最低、极其光滑的曲线,这直接启发了数学家:能否用数学函数来模拟这一物理过程?数学家将物理样条的力学原理转换为数学问题:寻找一条穿过所有数据点且使弯曲势能(即函数二阶导数平方的积分)最小的光滑曲线。通过变分法证明,该优化问题的解正是“三次样条函数”。它采用分段的三次多项式,既避免了全局高次多项式的振荡,又通过强制连接点处一阶导数(斜率)和二阶导数(曲率)连续,保证了整体的光滑性。因此,三次样条插值是数学理论对工程实践的完美模拟,其名称“样条”也正是为了致敬其物理起源。

5.8 本章思维导图

本章思维导图如图 5.5 所示。

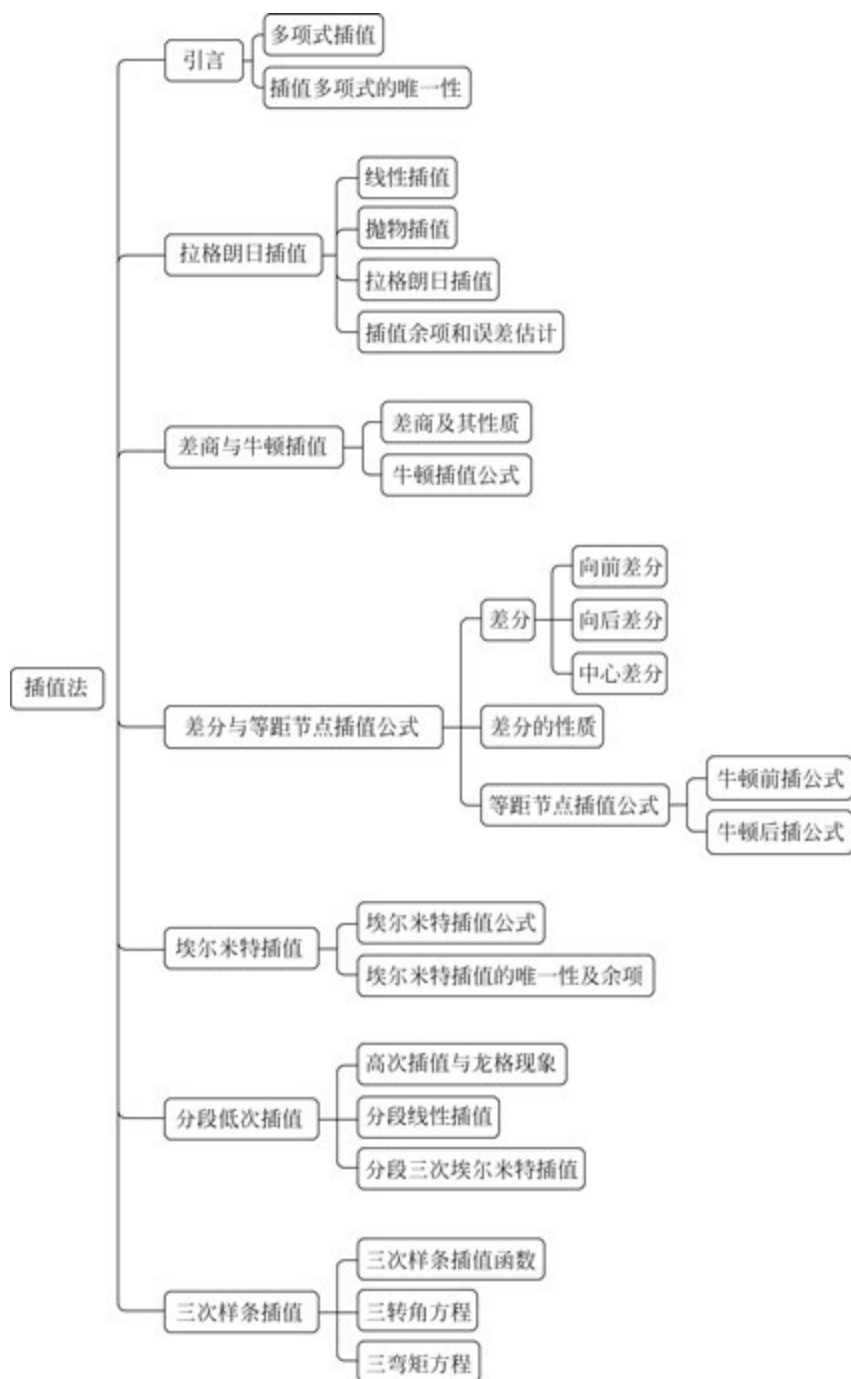


图 5.5 本章思维导图

习题

1. 当 $x = -1, 0, 1$ 时, $f(x) = 0, 2, 1$, 求 $f(x)$ 的拉格朗日插值多项式。



习题答案

2. 设 $f(x) = x^4$, 试利用拉格朗日插值余项定理写出以 $-1, 0, 1, 2$ 为插值节点的三次插值多项式。

3. 设 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 为函数 $y = f(x)$ 的 $n+1$ 个互异的插值节点, $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ 是拉格朗日插值基函数, 证明:

$$(1) \sum_{i=0}^n l_i(x) \equiv 1.$$

$$(2) \sum_{i=0}^n x_i^k l_i(x) \equiv x^k, k = 1, 2, \dots, n.$$

4. 已知 $\sin 0.32 = 0.314567, \sin 0.34 = 0.333487$ 有 6 位有效数字。

(1) 用线性插值求 $\sin 0.33$ 的近似值。

(2) 证明在区间 $[0.32, 0.34]$ 上用线性插值计算 $\sin x$ 时至少有 4 位有效数字。

5. 设 $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$, 求 $f[2^0, 2^1, \dots, 2^5]$ 和 $f[2^0, 2^1, \dots, 2^6]$ 。

6. 已知函数 $f(x)$ 在节点 $x = 0, 1, 2, 4$ 的函数值分别是 $1, 9, 23, 3$, 求 $f(x)$ 的三次牛顿插值多项式。

7. 已知函数表如表 5.12 所示。

表 5.12 第 7 题函数表

x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	3	5	9	15

分别用牛顿向前插值、向后插值公式计算 $f(1.5), f(3.7)$ 的近似值。

8. 已知 $f(0) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 3, f'(1) = 9$, 构造三次埃尔米特插值多项式 $H(x)$, 并计算 $f(0.5)$ 。

9. 为了使 $f(x) = \sin x$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上等距节点的分段线性插值函数 $\varphi(x)$ 的误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 应如何确定步长?

10. 求函数 $f(x) = x^4$ 在区间 $[a, b]$ 上的分段埃尔米特插值函数, 节点取 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 。

11. 已知函数表如表 5.13 所示, 建立三次样条插值函数。

表 5.13 第 11 题函数表

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	2	4	2
$f'(x_i)$	1		-1

12. 构造适合表 5.14 所示数据的三次样条函数 $s(x)$ 。

表 5.14 第 12 题数据

x_i	0.25	0.30	0.39	0.45	0.53
$f(x_i)$	0.5000	0.5477	0.6245	0.6708	0.7280
$f'(x_i)$	1.0000				0.6868