

中学数学教育教程

江忠东 著

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书遵循“理论奠基—实践落地—进阶提升”逻辑，采撷当前研究成果的精华，融入作者 20 余年中学数学教学和近 10 年高校教育研究的实践经验，用生动、鲜活的案例展开论述，力求兼具理论高阶性与实践指导性。本书包括理论篇(共 5 章)、实践篇(共 4 章)、进阶篇(共 2 章)，分别讲述数学教育的基础知识(含数学教育的发展简史、基本原理、核心内容、特定课题、课程改革)、实现知行转化的关键路径(含问题编拟、教学设计、技能实训、课堂评价)和数学教学的基本技能(含说课、说题、微格、见习、实习、研习)。本书教学资源丰富，配备教学视频、知识图谱、教学课件、教学大纲、教案、学时进度表、习题及答案等。

本书可作为高等院校数学与应用数学(师范类)专业教材，也可供中学数学一线教师或教育研究者使用。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。举报：010-62782989，beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

中学数学教育教程 / 江忠东著. -- 北京：清华大学出版社，2026. 1. -- ISBN 978-7-302-70474-4

I. G633.602

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025DT2045 号

责任编辑：高 岫 韩宏志

封面设计：周晓亮

版式设计：思创景点

责任校对：成凤进

责任印制：宋 林

出版发行：清华大学出版社

网 址：<https://www.tup.com.cn>，<https://www.wqxuetang.com>

地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084

社 总 机：010-83470000 邮 购：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：涿州汇美亿浓印刷有限公司

经 销：全国新华书店

开 本：185mm×260mm 印 张：19 字 数：405 千字

版 次：2026 年 1 月第 1 版 印 次：2026 年 1 月第 1 次印刷

定 价：69.00 元

产品编号：114196-01

前言

党的二十大报告提出，“加强基础学科、新兴学科、交叉学科建设，加快建设中国特色、世界一流的大学和优势学科。”这些重要论述，为推进基础学科人才培养提供了根本遵循。数学是培养理性思维与创新能力的核心学科，中学数学教育处于学生认知发展关键期，既是小学知识的深化，也是高等教育的基础。在教育改革与核心素养培养的背景下，为助力中学数学教师、师范生及研究者“上通数学，下达课堂”，编写了本书。

本书遵循“理论奠基—实践落地—进阶提升”逻辑，共十一章，分三篇，兼顾知识完整性与实用性。

在理论篇中，“数学教育的发展简史”梳理古今演变历程，明晰教育思想与方法的脉络；“数学教育的基本原理”构建理论框架，帮助读者树立科学教育观；“数学教育的核心内容”剖析“四基”教学要求，明确教学方向；“数学教育的特定课题”探讨数学教育的本质、教育技术的应用、资优生培养与学困生转化等现实问题，提供相关的理论支撑；“基础教育的课程改革”解读新课标，助力读者把握教育趋势。

实践篇是实现知行转化的关键路径。“数学问题的编拟与研究”讲解问题设计原则与方法，借问题教学激发学生兴趣；“数学教学的设计与优化”阐述目标设定、内容组织等环节，结合案例优化教学流程；“数学教学的技能与训练”聚焦导入、讲授等核心技能，提供实践策略；“数学课堂的观摩评析”传授观察与评课方法，提升教学反思能力。

进阶篇助力专业成长。“中学数学教育见习、实习、研习”提供实践全流程建议，助师范生完成角色转变，为在职教师提供教研参考；“中学数学说课、说题和微格实训”介绍新型教研方式，指导流程设计与技巧运用，提升综合竞争力。

本书坚持理论联系实际，融入案例与当前研究成果，力求兼具理论高阶性与实践指导性。为便于深入学习，本书配套了教学视频和拓展资料，可扫书中二维码查看。同时，为了便于教学使用，本书配备了教学课件、教案、教学大纲、学时进度表、知识图谱、习题及答案等丰富的教学资源，可扫右侧二维码获取。我深知中学数学教育之路任重而道远，愿本书成为读者的“引路人”，为教育事业添力。

最后，感谢所有支持者，期待读者提出宝贵意见，以完善本书。



教学资源

江忠东

2026年1月5日

目 录

理 论 篇

第一章 简史：数学教育的发展简史	3
第一节 数学教育的发展历史	3
一、古代数学教育的起源与发展	3
二、中国古代数学教育体系的形成与特点	4
三、中世纪至文艺复兴时期数学教育的变革	5
四、近代数学教育的发展与变革	6
五、现代数学教育的全球化与多元化	7
第二节 数学教育的研究内容	8
一、研究对象	8
二、研究方法	8
第三节 数学教育的研究案例	9
第四节 20 世纪数学观的变化	12
一、数学的发展	12
二、数学观的变化	13
第五节 20 世纪数学教育观的发展	15
一、数学教育观的历史变迁	15
二、现代数学教育观	16
第六节 数学教育的文化功能	17
一、数学的认识价值	17
二、数学的智力价值	17
三、数学的社会价值	18
四、数学的精神价值	18
五、数学的美学价值	18
第七节 20 世纪中国数学教育观的变化	19
一、20 世纪中国数学教育面临的问题	19
二、新课标下中国数学教育理念的发展	20

第八节 国际视野下的中国数学教育改革·····	23
一、美国《州立共同核心课程标准——数学》(CCSSM)的八条实践标准·····	23
二、未来十年中国数学教育展望·····	23
第二章 原理：数学教育的基本原理·····	25
第一节 弗赖登塔尔的数学教育理论·····	25
一、现实·····	25
二、数学化·····	26
三、再创造·····	28
四、现实、数学化、再创造的关系·····	29
第二节 波利亚的数学解题理论·····	30
一、波利亚的数学教育观·····	30
二、波利亚的“怎样解题”表·····	31
三、案例分析·····	32
第三节 皮亚杰的建构主义学说·····	36
一、认知建构的核心机制·····	36
二、认知发展的阶段理论·····	37
三、对教育的影响·····	37
第四节 数学教育的中国道路·····	37
一、中国数学教育道路的基本内涵·····	37
二、中国数学教育道路的文化背景·····	38
三、中国数学教育道路的历史形成·····	38
四、中国数学教育道路的基本理念·····	39
五、中国数学课堂教学的五大特征·····	41
第三章 内容：数学教育的核心内容·····	45
第一节 数学教育的目标·····	45
一、数学课程目标的表述·····	45
二、数学教学目标的确定·····	46
第二节 数学教学的原则·····	46
一、数学教学的基本原则·····	47
二、数学教学的应用原则·····	47
第三节 基础知识的教学·····	50
一、概念的教学·····	50
二、命题的教学·····	51
第四节 基本技能的教学·····	53
一、数学基本技能的类型·····	53
二、数学基本技能的教学·····	54

第五节 基本思想的教学	55
一、数学基本思想	55
二、数学解题思想	56
三、数学基本思想的教学	59
第六节 基本活动经验的教学	59
一、基本活动经验的类型	59
二、基本活动经验的教学	60
第七节 数学教学模式	61
一、基本的数学教学模式	61
二、新兴的数学教学模式	70
三、特殊课型的教学	73
第八节 数学教学的德育功能	75
一、数学教学的德育功能体现	75
二、数学教学的德育实践框架	76
第四章 教研：数学教育的特定课题	79
第一节 数学到底“教什么”	79
一、教学生学“本质”	79
二、教学生学“过程”	80
三、教学生学“思想”	81
四、教学生学“结构”	82
第二节 学习心理学与数学教育	82
一、行为主义心理学视角下的数学教育	82
二、认知主义心理学视角下的数学教育	83
三、建构主义心理学视角下的数学教育	85
四、人本主义心理学视角下的数学教育	88
第三节 STEM 与数学教育	89
一、STEM 教育简介	89
二、STEM 与数学教育的融合	89
第四节 数学教育技术	91
一、几款常见的数学教学软件	91
二、几个常用的教学资源网站	91
三、教师的人工智能素养提升	92
四、信息技术在数学教学中的作用	97
第五节 资优生的培养与学困生的转化	97
一、资优生的界定与培养	97
二、数学学困生的诊断与转化	99

第六节 数学教育研究的范式·····	101
第七节 学术论文编写规则·····	103
一、学术论文的基本结构·····	103
二、学术论文的编号要求·····	106
三、《中华人民共和国国家标准(GB/T 7713.2—2022)·学术论文编写规则》附录·····	107
第八节 数学教育专业本科毕业论文的基本范式·····	108
一、毕业论文开题报告·····	108
二、毕业论文答辩报告·····	109
三、毕业论文抽查情况·····	110
第五章 课改：基础教育的课程改革·····	112
第一节 基础教育课程改革简史·····	112
一、国际上，中学数学课程改革趋势·····	112
二、新中国成立以来我国基础教育的八次课程改革·····	113
第二节 《义务教育数学课程标准(2022 年版)》解读·····	114
一、《义务教育数学课程标准(2022 年版)》的修订·····	114
二、《义务教育数学课程标准(2022 年版)》中关于数学核心素养的论述·····	116
三、《义务教育数学课程标准(2022 年版)》课程变化·····	118
四、基于核心素养的义务教育数学教学·····	120
第三节 《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》解读·····	121
一、《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》的修订·····	122
二、《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》中关于数学核心素养的论述·····	122
三、《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》课程变化·····	124
第四节 数学建模与数学课程·····	129
一、数学建模概述·····	129
二、数学建模案例·····	129
第五节 研究性学习与数学课程·····	132
一、研究性学习概要·····	132
二、研究性学习案例·····	132
第六节 数学文化与数学课程·····	134
一、教学中渗透数学文化的方法·····	134
二、数学史融入数学教学的思考·····	135

实 践 篇

第六章 研题：数学问题的编拟与研究·····	141
第一节 数学问题和问题解决·····	141
一、数学问题·····	141

二、数学解题·····	142
第二节 数学新题型·····	149
一、数学应用题·····	149
二、数学情境题·····	150
三、数学开放题·····	150
四、“好问题”的特征·····	151
第三节 数学解题研究·····	152
一、数学解题研究案例·····	153
二、数学推理·····	157
第四节 数学试题命制·····	159
一、试题命制流程·····	159
二、单题命制方法·····	160
三、试题的“四度”·····	170
第七章 备课：数学教学的设计与优化·····	173
第一节 教学设计的概念·····	173
第二节 数学教学设计的内容·····	174
一、教学目标的制定(教学设计的“指南针”)·····	174
二、学习对象的分析(教学设计的“依据”)·····	177
三、教学内容的组织(教学设计的“根基”)·····	178
四、重点难点的确定(教学设计的“关键”)·····	180
五、教学方法的选择(教学设计的“工具”)·····	181
六、教学过程的设计(教学设计的“蓝图”)·····	182
七、教学评价的策划(教学设计的“反馈器”)·····	184
第三节 数学教学设计的形式·····	186
一、教学设计的传统呈现形式·····	186
二、教学设计的新型呈现形式·····	188
三、教学设计的优化示例·····	191
第四节 教学设计的四大理论框架·····	199
第八章 技能：数学教学的技能与训练·····	202
第一节 数学课堂导入技能·····	202
一、数学课堂导入的原则·····	203
二、数学课堂导入的类型·····	203
第二节 数学课堂结束技能·····	204
一、数学课堂结束的原则·····	205
二、数学课堂结束的方法·····	205

第三节 数学课堂讲解技能·····	207
一、数学课堂讲解的类型与方法·····	207
二、数学课堂讲解的原则·····	211
第四节 数学课堂提问技能·····	212
一、数学课堂提问的方式·····	212
二、数学课堂提问的模型·····	213
三、数学课堂提问的类型·····	214
第五节 数学课堂强化技能·····	216
一、数学课堂强化的方式·····	216
二、数学课堂强化的误区·····	218
第六节 数学课堂启发引导技能·····	218
一、数学课堂启发引导的原则·····	218
二、数学课堂启发引导的方法·····	218
第七节 数学课堂观察技能·····	221
一、数学课堂观察的对象·····	221
二、数学课堂观察的方法·····	222
第八节 数学课堂板书技能·····	223
一、数学课堂板书的方法·····	223
二、数学课堂板书的要点·····	223
第九节 数学课堂教学技能的训练与提升·····	224
第九章 评课：数学课堂的观摩评析·····	227
第一节 数学课堂教学观摩·····	227
一、数学课堂教学观摩的主要流程·····	228
二、数学课堂教学观摩的基本原则·····	229
三、数学课堂教学观察的量表制定·····	229
第二节 数学课堂教学评析·····	232
一、数学课堂评析的维度·····	232
二、数学课堂评析的方法·····	233
三、数学课堂评析的原则·····	234
第三节 课堂教学观摩与评析案例·····	236
一、教学设计评析·····	236
二、教学片段评析·····	238
第四节 一堂“好课”的标准和要素·····	239
一、一堂“好课”的标准·····	239
二、一堂“好课”的要素·····	240
第五节 专家纵论一堂“好课”的标准·····	241

进 阶 篇

第十章 三习：中学数学教育见习、实习、研习·····	247
第一节 数学教师的成长之路·····	248
一、教师教学的三重境界和 6 个层次·····	248
二、数学教师提高数学学科素养的路径·····	249
三、数学教师提升数学教学素养的路径·····	250
四、教师必备的十大素养·····	251
第二节 教育“三习”·····	252
一、教育见习·····	252
二、教育实习·····	254
三、教育研习·····	259
第三节 中学数学同课异构·····	260
一、“同课异构”实施过程·····	261
二、“同课异构”案例分析·····	262
第十一章 三训：中学数学说课、说题、微格实训·····	266
第一节 学会说课·····	266
一、说课流程·····	267
二、说课要点·····	268
三、说课评价量表·····	269
四、说课与备课、上课的关系·····	269
五、说课案例·····	271
第二节 学会说题·····	277
一、说题流程·····	277
二、说题要点·····	278
三、说题评价量表·····	279
四、说题案例·····	280
第三节 微格教学·····	282
一、微格教学的基本特点·····	282
二、微格教学的训练内容·····	283
三、微格教学的一般流程·····	284
四、微格教学的设计模板·····	285
五、微格教学评价量表·····	286
六、人工智能时代教学技能训练的新变革·····	288
参考文献·····	291

理论篇

第一章 简史：数学教育的发展简史

内容概要

1. 数学教育的发展简史;
2. 数学教育的研究内容;
3. 20 世纪数学观的变化(纵向视角);
4. 数学教育的国际视野(横向视角)。

第一节 数学教育的发展历史

数学教育是研究数学教学的实践和方法的学科。它以数学科学为核心知识载体，融合教育学、心理学等相关理论与方法，具有鲜明的时代特征。数学教育中的教育目标、内容、技术等一系列问题，都会随着社会的进步而不断变革和发展。本节从国外到国内、从古代到现代，探讨数学教育的演变过程及其对社会的影响。

一、古代数学教育的起源与发展

数学教育的历史可以追溯到远古文明时期。在古埃及，数学作为一门重要的实用学科，主要服务于农业生产、建筑测量及天文历法等领域。大约在公元前 3000 年，古埃及的数学教育便已起步，当时的教育形式主要为口口相传及实物教学。教师通过实际的示范和生动的实例，向学生传授简单的算术运算、基础的几何知识及与天文学相关的初步内容。这些知识被广泛应用于金字塔建设等实际工程之中，充分展现了数学在古代社会的实用价值。古埃及的数学教育与当时的宗教和贸易活动紧密相连，不仅是一种技能的传授，还承载着文化传承的重要使命。

古希腊的数学教育则呈现出截然不同的面貌，具有鲜明的特点。古希腊的哲学家和数学家们对数学的发展做出了极为卓越的贡献，为后世数学教育奠定了坚实的基础。在古希腊的教育体系中，数学的地位举足轻重，它不仅涵盖了算术和几何等基础领域，还与音乐、哲学及天文学等学科相互交融，共同构成了一个全面且深入的知识体系。古希腊数学教育尤其注重培养学生的逻辑思维和抽象思维能力，采用演绎推理的方法，将数学证明视为核心环节，强调证明和推理过程的严谨性与逻辑性。教师通常通过课堂讲解与学生自学相结合的方式传授知识，鼓励学生积极思考、自主探索，这种教育方式极大地激发了学生的求知欲和创造力。欧几里得的《几何原本》便是古希腊数学教育理念和方法的杰出代表，其严密的逻辑体系和精湛的论证方法，对后世数学的发展产生了深远而持久的影响，成为数学教育史上的经典之作。

拾 遗



欧几里得及其
《几何原本》

古巴比伦同样在数学教育领域取得了显著成就。巴比伦人在数学方面展现出了高度的智慧，他们对数学的研究和应用涉及多个方面。在算术运算上，巴比伦人掌握了较复杂的计算方法，能够熟练进行整数和分数的四则运算；在代数领域，他们已经能够求解一些简单的方程，展现出了对数量关系的深刻理解；在几何方面，巴比伦人对图形的性质和测量也有一定的研究，这些知识在土地测量、建筑规划等实际场景中发挥了重要作用。古巴比伦的数学教育主要通过师徒传承的方式进行，徒弟在跟随师傅学习的过程中，逐渐掌握各种数学知识和技能。这种传承方式使得巴比伦的数学知识得以代代相传，为古代数学的发展做出了重要贡献。

二、中国古代数学教育体系的形成与特点

中国古代数学的发展源远流长，早在春秋战国时期，就已经出现了《周髀算经》等具有重要影响力的数学著作。《周髀算经》不仅包含了勾股定理等重要的数学定理，还涉及天文历法、测量等多个领域的应用，体现了中国古代数学注重实际应用的特点。在这一时期，数学教育主要以师徒传承的方式进行，注重实践和应用。教师通过具体的实例和自身丰富的经验，向学生传授算术、代数、几何及天文等方面的知识，培养学生解决实际问题的能力。这种教育方式使得数学知识能够紧密结合社会生产和生活的实际需求，得以广泛传播和应用。

拾 遗



算经

随着历史的演进，到了秦汉时期，数学教育得到了进一步的发展。政府开始重视数学教育，将其纳入官方教育体系，这为数学教育的规范化和普及化奠定了基础。在官方教育机构中，学生系统地学习数学知识，接受专业的数学训练。同时，民间的数学教育也呈现出一派繁荣的景象，许多学者和数学家通过开办私塾等方式，传授数学知识，培养了大量优秀的数学人才。这一时期，数学教材的种类逐渐丰富，内容也日益完善，为数学教育的发展提供了有力的支持。

《九章算术》的出现，标志着中国古代数学教育体系的初步形成。《九章算术》是

一部具有里程碑意义的数学著作，它采用问题集的形式，系统地总结了中国古代的数学成就。全书共分为九章，涵盖了方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股等多个方面的内容，全面反映了当时社会生产和生活中的各种数学问题。《九章算术》不仅对数学知识进行了详细阐述，还给出了具体的解题方法和步骤，具有很强的实用性和可操作性。它的出现，为中国古代数学教育提供了权威的教材和标准的教学内容，对中国古代数学教育的发展产生了深远影响，成为中国古代数学教育体系的核心组成部分。

中国古代数学教育始终注重实用性和计算能力的培养，这与当时的社会经济发展需求密切相关。在农业社会中，数学在土地丈量、水利工程建设、税收计算等方面都有着广泛的应用。因此，数学教育的主要目标是让学生能够熟练运用数学知识解决实际生活和生产中的问题。在教学方法上，中国古代数学教育通常采用实例教学和练习相结合的方式，通过大量的实际案例让学生理解数学知识的应用场景，再通过反复的练习巩固所学知识，提高学生的计算能力和解题技巧。这种注重实践和应用的教育理念和方法，使得中国古代数学在计算技术和应用数学方面取得了辉煌成就，为社会的发展和进步做出了重要贡献。

综上所述，世界古代数学教育的发展始终与文明演进、生产需求、宗教文化深度绑定，不同地区因地理环境、社会结构差异，形成了各具特色的发展路径。若以“时间线+文明区域”为双轴梳理，可以清晰地看到其从“实用导向”到“理论萌芽”、从“零散传授”到“体系化教育”的演进脉络。

三、中世纪至文艺复兴时期数学教育的变革

在中世纪的欧洲，数学教育的发展受到宗教和政治因素的显著影响。当时，教育主要由教会掌控，数学教育也不例外。数学知识在神学和哲学领域中被应用，其目的主要是服务于宗教教义的阐释和论证。在这一时期，欧几里得几何学成为数学教育的重要内容，学者们对欧几里得几何学进行了深入的研究和探讨。然而，由于宗教和政治的限制，数学教育的发展相对缓慢，数学知识的传播范围较为有限，主要集中在教会学校和少数贵族阶层中。

与之形成鲜明对比的是，阿拉伯地区的数学教育在这一时期却取得了令人瞩目的成就。阿拉伯数学家们在吸收和融合古希腊、古印度等数学成就的基础上，进行了创新和发展。他们强调数学在商业、天文学等领域的实际应用，将数学与其他学科紧密结合，促进了跨学科的交流与发展。在数学基础理论方面，阿拉伯数学家们也做出了重要贡献，他们重视演绎推理和证明，对代数学、三角学等学科的发展起到了积极的推动作用。阿拉伯的数学教育注重教学与科研的结合，培养了一批杰出的数学家和学者，他们的研究成果和教育理念对欧洲数学教育的复兴产生了深远的影响。

随着时间的推移，文艺复兴运动的兴起为欧洲数学教育带来了新的生机与活力。

拾 遗



中国古代教育
传统的结构

文艺复兴时期，欧洲社会对知识的追求和对科学技术的重视达到了前所未有的高度。在这一背景下，数学教育开始受到广泛关注，其重要性日益凸显。这一时期的数学教育强调实用性和实验性，注重培养学生的实际操作能力和解决问题的能力。教育者们积极引入新的教学方法和工具，如几何模型、教学演示等，以帮助学生更好地理解和掌握数学知识。同时，教育者们也开始关注学生的兴趣和需求，注重培养学生的自主学习能力和创新精神，鼓励学生大胆质疑、勇于探索。这些改革措施使得数学教育更加贴近实际生活，激发了学生学习数学的热情，为数学教育的发展注入了新的动力。

在文艺复兴的浪潮中，数学教材的编写和出版也迎来了新的发展阶段。教育者们开始编写适合不同年龄段学生的教材，这些教材的内容更加丰富多样，涵盖了数学的各个领域；在编排上更加注重循序渐进，契合学生的认知规律。教材的编写不仅注重知识的传授，还注重培养学生的思维能力和创新能力。同时，随着印刷技术的进步，数学教材的发行量大幅增加，使得更多的人能够接触到数学知识，促进了数学教育的普及和发展。

四、近代数学教育的发展与变革

17 世纪至 19 世纪，数学领域发生了革命性的变化，这一时期被称为近代数学时期。在这一时期，数学的发展突飞猛进，实现了从常量数学到变量数学的重大跨越。法国学者笛卡儿创立了解析几何学，他将代数方法与几何图形相结合，把变量引入数学，为数学的发展开辟了新的道路，成为数学发展史上的一个重要里程碑。英国科学家牛顿和德意志数学家莱布尼茨分别独立地建立了微积分学，微积分学的诞生使精密的测量和变量计算成为可能，为物理学、天文学等学科的发展提供了强有力的工具，极大地推动了科学技术的进步。

随着数学的快速发展，数学教育也面临着前所未有的变革需求。在这一时期，数学教育逐渐成为学校教育的核心组成部分，各国纷纷将数学纳入学校的必修课程体系。数学教育的目标不仅是传授数学知识和技能，更注重培养学生的逻辑思维能力、创新能力和解决实际问题的能力。教育内容也得到丰富和拓展，除了传统的算术、几何等基础内容，还逐渐涵盖了微积分、解析几何、概率论等新兴的数学分支学科。

在教学方法上，17 世纪的数学教育开始采用更加系统化和科学化的方法，如演绎推理和归纳推理等。教师通过严谨的逻辑推导和实例演示，帮助学生理解数学概念和定理，提高学生的学习效果和思维能力。同时，教育者们也开始注重培养学生的创新能力和实践能力，鼓励学生通过自主探究和实际操作来学习数学知识。到了 18 世纪，数学教育的教学方法更加多样化，除了传统的讲授式教学外，还出现了项目式学习、探究式教学等新型教学方法。这些新型教学方法强调学生的主体地位，注重激发学生的学习兴趣 and 主动性，使学生在积极参与的过程中更好地掌握数学知识和技能。

工业革命的兴起对数学教育产生了深远影响。工业革命带来了生产力的巨大飞跃，对科学技术和人才素质提出了更高的要求。数学作为科学技术的基础，其重要性愈发凸显。为满足工业发展的需求，各国政府加大了对数学教育的投入，推动数学教育的

普及和发展。学校教育开始注重培养学生的实际应用能力，使学生能够将数学知识运用到工业生产和科学研究中。同时，数学教育也逐渐与职业教育相结合，为不同行业培养了大量具有专业数学知识的人才，为工业革命的持续推进提供了有力的支持。

五、现代数学教育的全球化与多元化

20 世纪以来，数学教育进入一个全新的发展阶段，呈现出全球化和多元化的显著特征。随着信息技术的飞速发展和国际交流的日益频繁，数学教育在全球范围内得到了广泛的传播和交流。各国之间相互学习、借鉴先进的数学教育理念、教学方法和课程设置，推动了数学教育的国际化进程。同时，不同国家和地区根据自身的文化传统、教育体制和社会需求，发展出了各具特色的数学教育模式，形成了多元化的发展格局。

在这一时期，数学教育改革的浪潮席卷全球。各国纷纷对数学教育进行反思和改革，以适应时代发展的需求。改革的重点主要集中在以下几个方面。

(1) 强调学生的主体地位，注重培养学生的自主学习能力、创新能力和实践能力。教育者们通过创设丰富多样的教学情境，引导学生积极参与数学学习活动，鼓励学生自主探究、合作交流，培养学生的批判性思维和解决问题的能力。

(2) 注重数学与其他学科的整合，培养学生的综合素质和跨学科思维能力。数学与物理、化学、生物等学科的联系日益紧密，通过跨学科教学，学生能够更好地理解数学知识的应用价值，提高运用数学知识解决实际问题的能力。

(3) 关注数学教育的公平性和普及性，努力为全体学生提供优质的数学教育资源。各国政府加大了对教育的投入，改善教育基础设施，缩小城乡、区域之间的教育差距，确保每个学生都能享受到公平且有质量的数学教育。

在中国，现代数学教育的发展取得了举世瞩目的成就。中华人民共和国成立后，党和政府高度重视数学教育，将其作为培养社会主义建设人才的重要基础。通过制定统一的教学大纲、编写全国通用的教材，构建起完备的数学教育体系。在教学方法上，注重启发式教学，引导学生主动思考、积极学习。同时，加强数学教育与实际生活的联系，培养学生运用数学知识解决实际问题的能力。改革开放以来，中国数学教育积极与国际接轨，吸收借鉴国际先进的教育理念和教学方法，不断推进数学教育改革。在课程设置上，增加了数学实验、数学建模等实践性课程，培养学生的创新能力和实践能力。在教学手段上，广泛应用信息技术，实现了数学教学的数字化、智能化，提高了教学效率和质量。

随着数学教育的不断发展，数学教育研究也愈发受到重视。各国学者积极开展数学教育研究，探索数学教育的规律和方法，为数学教育的改革和发展提供了坚实的理论支撑。数学教育研究的领域不断拓展，涵盖了数学课程设计、教学方法创新、学生学习心理、教师专业发展等多个方面。研究方法也日益多样化，采用了实证研究、案例分析、行动研究等多种研究方法，使研究结果更加科学、可靠。通过数学教育研究，不断推动数学教育实践的创新和发展，提高数学教育的质量和水平。

第二节 数学教育的研究内容

数学教育是研究数学教学的实践和方法的学科。它主要研究两点：其一是“教什么”，即教材问题；其二是“怎么教”，即教学方法问题。研究案例要注重真实性、故事性和价值性。

一、研究对象

数学教育的研究对象围绕“数学教育活动的全流程与核心要素”展开，聚焦探索数学知识传递、学生学习、教学实践及教育系统运行的规律，可归纳为以下四大核心领域，各领域相互关联，共同构成数学教育研究的完整体系。

(1) 数学学习的机制与发展特征。这是研究的核心起点，重点回答“学生如何学数学”，聚焦学生在数学学习中的认知、能力与非认知层面的规律。

(2) 数学教学的实践与优化策略。聚焦“教师如何教数学”，研究数学教学全流程的有效模式与方法，是连接“课程内容”与“学生学习”的关键。

(3) 数学课程与教材的设计及实施。回答“教什么数学”，是数学教育内容的核心载体，研究课程与教材的科学性、适配性与落地效果。

(4) 数学教育系统与外部支持环境。聚焦“数学教育如何高效运行”，研究影响数学教育质量的宏观与微观环境因素，是保障前三大领域落地的支撑系统。

二、研究方法

数学教育是一个跨学科领域，研究方法包括定量研究法(如实验法、调查法等)、定性研究法(如观察法、比较法等)和混合研究法(结合定量与定性数据，互补验证)。

1. 实验法

这是研究者通过主动控制无关变量、操纵自变量(如教学方法、课程资源)，观察因变量(如学生数学成绩、解题能力)变化，以探究变量间因果关系的实证方法。其核心在于“控制变量归因”，需要预设可检验假设，遵循“设计(明确问题与变量、选设计类型)—实施(选对象、操纵变量、收数据)—分析(统计检验、验证假设)”流程。该方法常用于验证教学策略、课程资源等的有效性，使用时需注意伦理合规、变量控制严谨性及结果普适性边界，为数学教育实践改进提供科学依据。

2. 调查法

这是研究者通过问卷、访谈、测验等工具，系统收集学生数学学习情况(如知识掌握、学习态度)、教师教学现状(如教学策略、教研参与)等相关数据，进而分析数学教育现象、揭示问题或规律的研究方法。不需要干预教育过程，可分问卷调查(高效收集大量数据)与访谈调查(深入获取个体观点)。需要确保工具信效度与样本代表性，避免

数据偏差。调查法适于了解大范围数学教育现状(如区域学生数学学习兴趣分布), 探究影响因素(如家庭环境对数学成绩的影响), 为制定数学教育改进策略提供依据。

3. 观察法

这是研究者在自然数学教育情境(如课堂、课后辅导)中, 通过感官或录像、记录表等辅助工具, 系统且客观地记录学生学习行为(如解题过程、小组互动)、教师教学行为(如提问方式、反馈策略)等现象的研究方法。不需要干预教学流程, 可分为直接观察与间接观察、结构化观察与非结构化观察。需要规避主观偏见以保证记录客观性。观察法适于探究课堂互动模式、学生学习习惯等, 为分析数学教育问题提供原始依据。

4. 比较法

这是研究者将不同数学教育对象、情境或模式(如不同学段的数学课程设置、不同国家的教学策略、同一策略在城乡学校的应用)进行对照分析, 通过梳理异同点, 揭示数学教育现象背后规律(如课程结构与学生能力培养的关联)的研究方法。可分为横向比较(同一时间不同对象)与纵向比较(同一对象不同时期)。需要确保比较维度一致(如均从“教学目标、内容、评价”切入)、数据客观。比较法适于探究数学教育改革方向(如中外教材对比), 评估政策效果(如课改前后教学质量比较), 为优化数学教育实践提供参考。

第三节 数学教育的研究案例

下面将概括性地介绍 4 个数学教育研究案例, 旨在使读者对数学教育研究方法和领域有更具体的了解和认识。

视 频



基础教育课题研究
“三要素”

【案例】通过访谈了解课堂教学现状(调查法)——中、高考数学复习课的积弊

1. 舍不得

重预设, 轻生成。例如等比数列前 n 项和公式的推导, 绝大多数教师照搬人教版教材中的错位相减法:

$$\text{由} \begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \\ a_n = a_1 q^{n-1} \end{cases}$$

$$\text{得} \begin{cases} S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}, \\ qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n \end{cases}$$

$$\therefore (1-q)S_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$\text{当 } q \neq 1 \text{ 时, } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \text{ 或 } S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q};$$

$$\text{当 } q = 1 \text{ 时, } S_n = na_1.$$

但是,这种方法一开始为什么要两边同乘以 q ? 这是很难想到的! 基于学生的学习经验,可以先采用以下方法进行启发引导。

(1) 《莱因德纸草书》中的方法(a_n 与 S_n 关系法)。

由 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + q(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1})$,
得 $S_n = a_1 + qS_{n-1}$, 有 $S_n = a_1 + q(S_n - a_n)$, 即 $(1-q)S_n = a_1 - a_nq$ 。(结论同上)¹

(2) 化归与转化法。

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + q(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1})$,
得 $S_n = a_1 + qS_{n-1}$, 即 $S_n - \frac{a_1}{1-q} = q\left(S_{n-1} - \frac{a_1}{1-q}\right)$ (当 $q \neq 1$ 时),

故 $\left\{S_n - \frac{a_1}{1-q}\right\}$ 是以 $S_1 - \frac{a_1}{1-q} = a_1 - \frac{a_1}{1-q}$ 为首项、以 q 为公比的等比数列,

有 $S_n - \frac{a_1}{1-q} = \left(a_1 - \frac{a_1}{1-q}\right)q^{n-1}$, 得 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 。

(3) 《几何原本》中的方法(等比性质法)。

由等比数列的定义, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$,

根据等比的性质, $\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} = \frac{S_n - a_1}{S_n - a_n} = q$, 得 $(1-q)S_n = a_1 - a_nq$ 。(结论同上)²

(4) 数学归纳法。

由 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$,

得 $S_1 = \frac{a_1(1-q^1)}{1-q}$, $S_2 = \frac{a_1(1-q^2)}{1-q}$, $S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}$, ..., 猜想 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, 再用

数学归纳法证明(略)。

(5) 不完全归纳法。

注意到重复的规律性, 由 $(x-1)(x+1) = (x^2-1)$ 、 $(x-1)(x^2+x+1) = (x^3-1)$ 、 $(x-1)(x^3+x^2+x+1) = (x^4-1)$ 可以推导出等比数列(几何数列)的一般求和公式。

2. 等不及

秉持绝对主义数学观, 否定可误主义数学观。例如在解题教学中, 教师习惯用所谓的“灵巧”方法, “覆盖”学生本真的思维。

习题: 已知圆 $C_1: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$, 圆 $C_2: (x-5)^2 + (y+6)^2 = 4$, 求两圆公共弦所在直线的方程。

1 详见: Struik D J. 数学简史(第四版)[M]. 胡滨, 译. 北京: 高等教育出版社, 2018.

2 详见: 欧几里得. 几何原本[M]. 张卜天, 译. 北京: 商务印书馆, 2020.

学生解法：∵ $k_{C_1C_2} = \frac{-6+3}{5-2} = -1$ ，

∴ $k_{公共弦} = 1$ ，

又两圆心连线的中点为 $M\left(\frac{2+5}{2}, \frac{-3-6}{2}\right) = M\left(\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ ，

故公共弦方程为： $y + \frac{9}{2} = 1 \times \left(x - \frac{7}{2}\right)$ ，即 $x - y - 8 = 0$ 。

教师解法：联立方程 $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25 \\ (x-5)^2 + (y+6)^2 = 4 \end{cases}$

两式相减得， $2x - 2y - 23 = 0$ 。

注：应该针对学生的解法，指出致误之处(公共弦不一定过两圆心连线的中点)，进行有效纠错(将中点改为定比分点)。

3. 闲不住

重视教师的主导作用，轻视学生的主体地位。例如，数学实验“二次函数的图象与性质”中教师包办代替，角色错位。

4. 接不上

与前学知识和后续内容脱节。例如，新授时不研究高考，复习时不回归教材。

【案例】数学课堂教学中的学生行为(观察法)——学生提问

如何在课堂中培养学生提出问题的能力是近年来数学课堂教学研究的热点问题。波利亚认为“对自己提出问题是解决问题的开始”，作为“问题解决”的一种手段，“提出问题”成为数学教育研究的对象。可用表 1-1^[13]对课堂教学或课堂录像中学生提问行为进行记录和分析。

表 1-1 学生课堂提问观察表

课题:		课时长度:		第 课时:	
教师:		授课年级:		教学方法:	
提问主体	提问对象	提问时机	提问内容	提问水平	教师反馈

【案例】通过教学实验检验理论(实验法)——幼儿计数能力发展顺序

我国著名儿童心理学家曹子方教授曾经运用皮亚杰的方法，对幼儿计数的认知发展做过具体研究(见表 1-2)。结果发现，3~7 岁幼儿计数能力的发展顺序是口头数数，按物点数，说出总数，按数取物。所谓“口头数数”是指幼儿能够像背儿歌似的顺着“唱数”；“按物点数”是指幼儿能够做到口手一致地点数；“说出总数”是指按物点数后能够正确说出所数对象的总数；“按数取物”是指按一定的数目拿出同样多的物体。

表 1-2 杭州地区幼儿计数的平均成绩(最高能数到的数目)

儿童年龄	3 岁	4 岁	5 岁	6 岁
口头数数	7	22	59	100
按物点数	4	20	50	100
说出总数	3	15	47	100
按数取物	3	9	37	100

【案例】对教师综合素质的调查研究(比较法)——中美学生心目中优秀教师的品质

有专家通过问卷调查(N=1200)和深度访谈(60 人)对比了中美中学生对优秀教师品质的认知差异。结果显示(见表 1-3),两国学生均重视教师的师德修养和人格魅力,80%以上将“品德高尚”视为核心品质。但文化差异显著:中国学生更注重教师的专业权威性(55%强调“学识渊博”),反映集体主义文化下对“传道授业”传统的延续;美国学生则更看重支持性特质(62%重视“关注个性”),体现个人主义文化对自主性的推崇。

表 1-3 中美两国中学生心目中优秀教师的品质对比表

中国	美国
责任心强	友善
品德高尚	尊重学生
关爱和尊重学生	有耐心
有耐心、不偏心	兴趣广泛
涵养好	仪表得体
幽默	公正
学识渊博	风趣幽默
严慈相济	良好的品德
通情达理	关注个体
敢于承认自己的失误	灵活性强

第四节 20 世纪数学观的变化

数学,是研究数量关系与空间形式的学科,是人类对事物的抽象结构与模式进行严格描述、推导的一种通用手段,在人类历史发展、社会生活和科学技术研究中,数学发挥着不可替代的作用。

一、数学的发展

(一) 数学发展史上的 4 个高峰

2000 年 7 月 31 日至 8 月 6 日,第九届国际数学教育大会(ICME9)在日本东京举行,大会主席藤田宏教授提到数学发展史上的 4 个高峰(引用时有所修改)。

拾 遗



几何学的发展
脉络

(1) 以欧几里得《几何原本》为代表的古希腊公理化数学(公元前 700—公元前 300 年)。

(2) 以牛顿发明微积分为代表的无穷小算法数学(17—18 世纪)。

(3) 以希尔伯特为代表的现代公理化数学(19—20 世纪中叶)。

(4) 以冯·诺依曼创设现代计算机技术为代表的信息时代数学(20 世纪中叶至今)。

以上 4 个数学发展阶段, 显示出“数学的应用性”和“严谨的公理化”两种思潮的交互出现。

(二) 核心数学的发展趋势

大体说来, 数学涵盖三大核心领域: 研究数的部分, 属于代数学的范畴; 研究形的部分, 属于几何学的范畴; 沟通形与数且涉及极限运算的部分, 属于分析学的范畴。受数学内部与外部问题的推动, 核心数学的发展趋势呈现出以下特点。

(1) 跨学科融合。数学与物理、计算机科学、生物学等领域的交叉日益加深, 推动了新理论和新工具的产生。

(2) 计算数学的崛起。高性能计算和算法的进步使大规模数值模拟和复杂问题求解成为可能。

(3) 数据科学的推动。大数据和人工智能的兴起促进了统计学、优化理论和概率论等数学分支的发展。

(4) 抽象与应用的平衡。纯数学研究继续深化抽象理论, 同时应用数学在解决实际问题中的作用不断增强。

(5) 新工具与新方法。新数学工具和方法的出现, 如范畴论、代数几何和表示论, 推动了多个领域的进展。

(6) 开放问题与猜想。许多未解决的数学难题和猜想, 如黎曼猜想和 P 与 NP 问题, 持续吸引研究者的关注。

二、数学观的变化

(一) 数学观的分类

数学观是人们对数学本质的理性思考。数学观的结构主要包括数学知识观(数学的构成)、数学本质观(数学的逻辑)和数学价值观(数学的功能)三个方面。由于对数学本质的认识不同, 数学观存在以下四大主要哲学流派。

(1) 柏拉图主义(platonism)。代表人物是哥特洛布·弗雷格(Gottlob Frege)。其核心观点是: 数学真理存在于一个超越人类思维的独立世界, 数学对象是真实存在的。柏拉图主义者认为数学知识是通过理性洞察这些客观存在的数学对象来获得的。例如, 他们认为圆周率 π 是一个客观存在的数学常数, 它不依赖于人类的发现或定义。

拾 遗



希尔伯特公理
体系

拾 遗



数学发展史上的
4 个重要时期

(2) 形式主义(formalism)。其代表人物是大卫·希尔伯特(David Hilbert)。其核心观点是:数学只是一套符号和规则的游戏,不关心这些符号背后的意义,只要规则自洽、逻辑一致就行。形式主义者关注于数学理论的公理化和形式化,强调数学证明的形式正确性。例如,证明一个几何命题时,我们不关心图形的物理属性,只关心它们在给定公理系统下的形式逻辑关系。

(3) 逻辑主义(logicism)。其代表人物是伯特兰·罗素(Bertrand Russell)和阿尔弗雷德·诺斯·怀特海(Alfred North Whitehead)。其核心观点是:数学可以看作逻辑的一种延伸,所有数学概念和命题都可以通过逻辑推理推导出来。逻辑主义者试图将数学建立在逻辑的基础之上,通过逻辑推理来证明数学定理。例如,自然数可以通过逻辑概念来定义,将0定义为一个空集的集合,然后将每个自然数定义为它自己的后继者。即 $0 = \{\emptyset\}$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$, $3 = \{0,1,2\}$, 以此类推。

(4) 直觉主义(intuitionism)。其代表人物是L. E. J. 布劳威尔(Luitzen Egbertus Jan Brouwer)。其核心观点是:数学知识来源于人类的直觉,数学对象是由心智构造的,数学真理是通过直觉直接体验到的。直觉主义者拒绝接受排中律和无穷集合的概念,认为数学证明必须能够构造性地展示其结论。例如,证明存在一个自然数 n 使得 $n^2 > 100$ 。他们采用结构性证明:通过直觉和计算知 $10^2 = 100$,所以任何大于10的数的平方都会大于100,因此可取 $n = 11$ (一个具体的构造),计算 $11^2 = 121$,显然 $121 > 100$ 。

(二) 数学观的变化

20世纪60年代,拉卡托斯(Imre Lakatos)将波普尔的证伪主义科学哲学理论推广运用到数学领域而发展出自己的拟经验主义的数学观,即可误主义数学观。它是继柏拉图主义、形式主义、逻辑主义、直觉主义四大数学哲学流派之后涌现的一种新的数学哲学思想,代表着数学观的新方向。数学观呈现出与时俱进、开放包容、注重实践的发展趋势,具体表现在以下5个方面。

(1) 以应用为导向。数学不仅是一门学科,还是一种工具(解决实际问题的思维方式和方法)。

(2) 以创新为核心。随着科技的发展,需要创造性地应用数学知识,发展新的数学方法和理论。

(3) 全球化的视野。数学是全球性的语言系统,提倡数学教育 and 研究合作,共同解决全球性问题。

(4) 与现代技术结合。大数据、人工智能、机器学习等现代技术的发展为数学带来了新的挑战和机遇。

(5) 与其他学科融合。数学与其他学科(如物理学、生物学、经济学等)联系密切,跨学科的研究方法正在成为数学研究的新趋势。

第五节 20 世纪数学教育观的发展

从 20 世纪初的培利—克莱因数学教育改革运动，到 20 世纪 60 年代的“数学教育现代化”运动，再到现在世界各国的数学教育改革运动，可以看出，自班级授课制以来，数学教育改革脚步一刻也没有停止，且有愈演愈烈之势，而推动数学教育改革的源动力就是数学教育观念的转变。

一、数学教育观的历史变迁

(一) 培利—克莱因的数学教育观

培利—克莱因的数学教育观是20世纪初世界范围数学教育改革运动的重要思想，由英国的培利(J. Perry, 1850—1920)和德国的克莱因(F. Klein, 1849—1925)提出。表 1-4 将培利与克莱因的数学教育观进行了对比。

表 1-4 培利与克莱因的数学教育观

关注点	培利	克莱因
强调数学的实用性和现实联系	主张数学教育应注重实际应用，培养创新思维，反对过度抽象和形式化	认为数学应与物理、工程等结合，强调数学对解决实际问题的重要性
注重直观与实验	提倡通过实验和直观方法教授数学，帮助学生通过观察和操作理解概念	强调几何和物理直观是数学学习的基础，主张从具体到抽象的教学路径
坚持以学生为中心	主张以学生为中心，鼓励自主学习和探究，教师应担当引导者而非权威角色	提倡启发式教学，通过问题引导和讨论激发学生思考
推动教育改革	批评传统数学教育的僵化，呼吁改革以适应现代科学和工程需求	推动数学教育现代化，强调更新教学内容和方法
提倡跨学科融合	认为数学教育应与其他学科结合，培养综合能力	主张数学与物理、工程等学科融合，促进跨学科学习
教学方法多样化	提倡多样化的教学方法，如实验、讨论和探究式学习	主张采用多种教学手段，包括直观演示、问题解决和跨学科项目

由表 1-4 可以看出，培利与克莱因的数学教育观强调数学的实用性、直观性和学生中心性，主张数学应与现实紧密结合，通过实验和启发式教学培养学生的应用能力和创新思维。这些观点对现代数学教育具有重要的指导意义。

克莱因是国际数学教育委员会(于 1908 年成立)第一任主席，他的数学教育主要包括以下观点。

(1) 强调函数的核心地位。克莱因提出函数是数学的“灵魂”，应该成为中学数学的“基石”。他主张以函数观念为中心，将算术、代数和几何方面的内容通过几何形式综合起来，强调要用近代数学的观点来改造传统的中学数学内容，加强函数和微积分的教学，改革和充实代数的内容。

(2) 倡导高观点下的初等数学。克莱因认为基础数学的教师应该站在更高的视角，

即高等数学的视角来审视、理解初等数学问题。这样,事物才能显得明了且简单。他认为一个称职的教师应当掌握或了解数学的各种概念、方法及其发展与完善的过程,及数学教育演化的经过。

(3) 注重数学理论的实际应用。克莱因提倡数学理论应用于实际情景,不主张强调形式的训练,而主张充分发展学生对客观世界的数学观察力。他认为数学教育应该培养学生运用数学知识解决实际问题的能力。

(4) 强调学科间的联系。克莱因主张在算术、代数、几何、三角四门数学学科之间建立密切联系,并加强数学与物理学的联系,使学生能够更好地理解和应用数学知识。

(5) 以教育学和心理学观点指导教学。克莱因认为教材应适应学生心理的自然发展,应该以教育学和心理学的观点指导数学的教学活动,这为现代的数学教育研究提供了关键的方向。

(6) 主张通法通识。克莱因认为应该用综合起来的一般概念和方法来解决问题,而非钻研那种特殊的解法,强调培养学生对数学通性通法的掌握和运用能力。

(7) 认为教育是发生性的。克莱因强调数学教学是一个生成的过程,要关注学生在学习过程中的动态发展和知识的自然形成过程,而非单纯地灌输知识。

(二) 新数运动中主要的数学教育观

新数运动(New Math)是 20 世纪五六十年代在欧美兴起的一场数学教育改革运动。1957 年苏联人造卫星上天,成为其兴起的背景。其特点是公理化、现代化、几何代数化、传统数学精简化、教学方法多样化等。新数运动的成功之处是推动了全球数学教育的现代化,突出了数学教育的地位。失败之处是过于抽象,不符合学生认知规律。以下是新数运动中的主要数学教育观。

(1) 核心思想。将现代数学的核心概念和思想融入中小学数学课程,以适应科技革命对人才培养的需求。

(2) 教育主张。强调数学的抽象性和逻辑性,关注学生数学能力和思维发展,提出数学教育现代化口号。

(3) 课程内容。注重结构主义(统一性和连贯性),将代数结构、序结构和拓扑结构作为数学的核心,增加现代数学内容,如集合论、群论、矩阵、拓扑学等。

(4) 教学方法。从传统的讲授式教学转向探究式教学,强调学生的主动探索和发现,培养学生的数学思维和解决问题的能力。

(5) 教育评价。注重过程性评价和多元评价,主张评价学生数学学习不仅要关注成绩,还要关注学生的思维品质、学习过程 and 实践能力。

二、现代数学教育观

现代数学教育观以核心素养为导向,强调数学育人价值。主张从“知识传授”转

向“思维培养”。融合情境化与结构化，既通过真实问题激发学生的应用意识，又构建知识体系帮助学生理解本质。兼顾工具性与文化性，既培养解决实际问题的能力，又渗透数学史与思想方法，尊重学生认知规律，倡导个性化学习，平衡传统与创新。

(1) 教育理念。强调以学生为中心，注重培养逻辑思维、问题解决能力和创造力，而非单纯地传授知识；同时，关注数学与现实生活的联系，以及数学文化的传承。

(2) 教学方法。探究式教学、合作学习、项目式学习等现代教学方法能够帮助学生更好地理解数学概念，在数学教育中已被广泛应用。

(3) 技术应用。数字化工具、教育软件、在线资源等技术能够增强学生的学习体验，提高教学效率与质量，在现代数学教育中扮演着越来越重要的角色。

(4) 评价体系。现代数学教育评价体系包含过程性评价、多元评价标准等，这些评价能够更全面地反映学生的学习成果。

(5) 全球视野。数学教育呈现国际化发展趋势，如 TIMSS、PISA 等国际评估项目对数学教育产生了重要影响，跨文化交流在数学教育中的作用也十分显著。

第六节 数学教育的文化功能

随着 20 世纪数学观和数学教育观的变化，人们越来越深刻而明确地认识到，数学是人类文化的重要组成部分，具有独特的文化价值。

一、数学的认识价值

人类文明往往以数学成就作为特殊标志。古希腊文明博大精深，但其传留于世的标志性著作是欧几里得的《几何原本》，它以数学为载体，塑造了人类对理性、秩序与确定性的追求，深刻影响了文明的思维范式与发展轨迹。

17 世纪的资本主义文明，是以牛顿创立的微积分作为标志，它成为那个科学黄金时代的基础，重塑了人类理解世界的方式，推动了文明的认知跃迁。

爱因斯坦的相对论是现代科学文明的标志，而它的基础则是黎曼几何。20 世纪下半叶开始的信息时代，则以数学信息论、数学控制论及电子计算机的冯·诺依曼方案为代表。

二、数学的智力价值

数学的智力价值核心在于其对人类思维能力的系统塑造与深度开发。数学具有抽象性、精确性、逻辑性、应用性等特点，是人类认知世界、创新突破的底层思维工具。

【案例】黎曼猜想(关于素数规律的猜想)

对于复变量 $s = \sigma + it$ ，黎曼定义了函数：

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

当 $\text{Re}(s) > 1$ 时, $\zeta(s)$ 收敛; 否则不收敛, 且当 $s=1$ 时, $\zeta(s)$ 是调和级数, 不收敛。

三、数学的社会价值

数学的社会价值体现在其作为“基础工具”“理性纽带”和“发展引擎”, 对人类社会运转与进步的全方位支撑。古希腊数学的标志性著作是《几何原本》, 它崇尚理性, 以逻辑推演见长, 具有“演绎数学”和“数学公理化”的特征。中国古代数学的标志性著作是《九章算术》, 它崇尚实用, 以计算见长, 具有“算法数学”和“数学机械化”的特征。

【案例】《几何原本》中的“对顶角相等”证明

证明: 如图 1-1 所示, 因为 $A + C = B + C = \text{平角}$, 根据公理 3: 等量减等量, 其差相等。

因此 $A = B$ 。

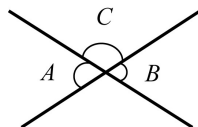


图 1-1

【案例】求水深和葭长

问题: 《九章算术》中的“引葭赴岸”问题“今有池方一丈, 葭生其中央。出水一尺, 引葭赴岸, 适与岸齐。问水深、葭长各几何。”

解析: 如图 1-2 所示, 设葭长 x 尺, 则由勾股定理得 $(x-1)^2 + 5^2 = x^2$ 。

解得 $x=13$, 故水深 $13-1=12$ (尺), 葭长 13 尺。

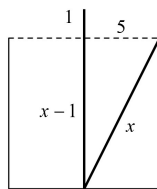


图 1-2

四、数学的精神价值

数学的精神价值是其对人类精神世界、思维品格与文明底色的深层塑造, 它超越了工具性的实用价值, 成为人类追求真理、理性与超越性的精神载体, 具体体现在:

- 塑造“求真与严谨”的精神内核。
- 培育“理性与批判”的思维品格。
- 激发“超越与探索”的精神动力。
- 构建“普遍与永恒”的精神纽带。
- 承载“理性之美”的精神慰藉。

五、数学的美学价值

数学的美学价值在于其以“理性为笔、逻辑为墨”构建的独特审美体系。数学具有简洁美、对称美、和谐美、统一美、奇异美等“由理性驱动的美”。

【案例】通过欧拉公式感受数学的美学价值

欧拉公式(代数): 对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 有

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

令 $x = \pi$, 得欧拉恒等式:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

欧拉公式(几何): 对于凸多面体, 有

$$V - E + F = 2 \quad (V: \text{顶点数}, E: \text{边数}, F: \text{面数})$$

用欧拉公式可证, 只有 5 种正多面体(正四、正六、正八、正十二、正二十面体)。

第七节 20 世纪中国数学教育观的变化

自从我国提出素质教育和创新教育的理念之后, 数学教育研究开始踏上学术探究的道路。与此同时, 国际上的数学教育理论和经验, 也先后被引入国内。数学教育观在悄然变化。

一、20 世纪中国数学教育面临的问题

1. 教育体系断层与师资不足

20 世纪 50 年代, 数学教育体系受苏联影响较大, 虽然建立了系统化教学大纲, 但师资力量严重短缺, 许多地区教师专业水平有限, 影响教学质量。20 世纪六七十年代, 正常教育秩序被打乱, 数学课程被简化为“实用算术”, 高等教育几乎停滞, 造成人才断层。

2. 课程内容与现实的脱节

数学课程内容与现实的脱节主要体现为两个时期。第一个时期是 20 世纪五六十年代。该时期过度强调抽象理论, 课程偏重形式化理论(如欧氏几何的严格证明), 忽视应用性, 与学生认知水平脱节。第二个时期是 20 世纪六七十年代。该时期走向另一极端, 片面强调“生产实践”, 弱化系统知识学习, 导致基础薄弱。

3. 应试导向的早期萌芽

20 世纪 80 年代后, 随着高考恢复, 数学教育逐渐围绕考试竞争展开, 题海战术盛行。该时期忽视对学生创造性思维的培养; 该趋势在 20 世纪 90 年代进一步加剧, 奥数热异化为应试工具。

4. 城乡与区域差距

农村地区资源匮乏, 教材、教具不足, 教师流动性大, 与城市教育水平差距显著扩大, 这一问题贯穿整个 20 世纪。

5. 国际比较下的反思

在 2018 年的 PISA 等国际评估中,虽然中国学生成绩优异(见表 1-5),但也暴露出在解决开放性问题、跨学科应用方面存在短板,引发对机械训练模式的批评。

表 1-5 2018 年 PISA 测试排名前十的国家或(地区)

排名	数学	PISA 得分	阅读	PISA 得分	科学	PISA 得分
1	中国内地	600	中国内地	556	中国内地	575
2	新加坡	562	韩国	539	芬兰	554
3	中国香港	555	芬兰	536	中国香港	549
4	韩国	546	中国香港	533	新加坡	542
5	中国台湾	543	新加坡	526	日本	539
6	芬兰	541	加拿大	524	韩国	538
7	列支敦士登	536	新西兰	521	新西兰	532
8	瑞士	534	日本	520	加拿大	529
9	日本	529	澳大利亚	515	爱沙尼亚	528
10	加拿大	527	荷兰	506	澳大利亚	527

6. 教育理念的摇摆

20 世纪中国数学教育理念的“摇摆”,本质是传统与现代、本土与外来、应试与素养、知识本位与能力本位四大核心矛盾的持续博弈。当然,这种摇摆并非无序动荡,而是在社会变革、教育政策调整、国际思潮冲击下的阶段性选择与反复,其表现可按时间脉络与核心维度展开,呈现出“引进—本土化—批判—重构”的循环特征。

二、新课标下中国数学教育理念的发展

新教育体现在四大改变上:改变教师的授课方式、改变学生的学习状态、改变学校的发展模式、改变教育的科研范式。进入 21 世纪,《义务教育数学课程标准(2011 年版)》和《义务教育数学课程标准(2022 年版)》,以及《普通高中数学课程标准(实验稿)》《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》相继颁布。通过这些“标准”,能洞察我国数学教育观念的发展和演变。

视 频



中国数学教育理念的
发展

1. 教学观

教学观从关心教师的“教”(品位),转向关心学生的“学”(品质)。从单一的传统教学方法,迈向多样化教学方法:以往讲授式教学方法占据主导地位,现在提倡启发式、探究式教学。强调数学课堂教学需要处理好三大关系:教师主导与学生主体的关系、教案与学案的关系、预设与生成的关系。

2. 能力观

能力观从注重知识传授到强调能力培养。原来注重“双基”(基础知识和基本技能)、

“三能”(计算能力、逻辑推理能力和空间想象能力)。现在强调“四基”(基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验)、“四能”(发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的能力)、“六核”(数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析)、“三会”(会用数学的眼光观察现实世界、会用数学的思维思考现实世界、会用数学语言描述现实世界)。

3. 课程观

课程观从学科独立到学科融合；从“知识点”拓展到“模块化”，再到“领域+主题”“主线+主题”。20世纪后期，数学教育开始注重跨学科融合，将数学知识应用于物理、化学、生物等学科中，同时从生活中挖掘数学素材，让学生体会数学在现实生活中的广泛应用，提高学生运用数学知识解决实际问题的能力。

义务教育阶段数学课程内容由数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践4个学习领域组成(“领域+主题”)。普通高中数学课程内容突出函数、几何与代数、概率与统计、数学建模与数学探究活动四条主线，数学文化融入其中(“主线+主题”)。

4. 学习方式

学习方式上，从“接受、记忆、模仿、练习”的传统学习方式，转变为“自主探索、动手实践、合作交流、阅读自学”的现代学习方式。

随着科技的快速发展，特别是互联网和信息技术的普及，中国的数学学习方式发生了显著的变化，主要体现在以下一些方面。

(1) 数字化学习资源的丰富：互联网上有大量的数学学习资源，包括在线课程、视频教程、虚拟实验室、互动式学习平台、数学软件和应用程序。满足移动学习、合作学习、互动式学习和学生个性化学习需求。

(2) 在线教育的兴起：随着在线教育平台的兴起，如中国大学MOOC(慕课)、网易云课堂、腾讯课堂等，学生可以参加各种网络学习，包括数学竞赛和数学活动。

(3) 教师角色的转变：教师不再是知识的唯一传授者，而是更多地扮演指导者和辅导者的角色，帮助学生利用各种资源进行有效学习。

(4) 评价方式的变革：传统的纸笔考试逐渐被在线测试和实时评估所取代，这些新的评价方式可以更及时地反馈学生的学习情况，帮助学生调整学习策略。

(5) 跨学科学习的提倡：数学与其他学科的融合越来越紧密，学生可以通过跨学科项目学习数学，如数学与物理、数学与经济等领域的结合。

总之，21世纪的中国数学学习方式正朝着更加灵活、个性化、互动和科技化的方向发展，这些变化有助于提高学生的学习效率和兴趣，培养他们的创新能力和解决问题的能力。为了促进学生学习方式的转变，教师应该处理好下列问题：①培养问题意识，激发学生学数学的主动性——“我想学”；②设计探究活动，发挥学生学数学的独立性——“我能学”；③运用媒体技术，开发学生学数学的创新性——“我善学”；④实施因材施教，尊重学生学数学的独特性——“我选学”。

5. 价值取向

价值取向上,从看重抽象和严谨,到关注数学文化、数学探究和数学应用。从“大纲”到“课标”,我国数学教育的价值取向演变脉络是:1951年应用与思维并重;1963年侧重“双基”与能力培养;1992年强调理论与实际联系;2001年和2003年突出、发展“应用意识”;2017年培养“核心素养”。

6. 教学评价

在教学评价方面,从单一性评价标准迈向多元化评价体系。过去,数学教育评价主要以学生的考试成绩作为唯一的衡量标准,过于注重结果评价,忽视了学生的学习过程和综合素质。20世纪末,开始倡导多元化的评价体系,不仅关注学生的学业成绩,还重视学生的学习过程、学习态度、创新能力等方面。评价主体也日益多元化,包括教师评价、学生自评和互评等,评价方式更加全面、客观,有助于促进学生的全面发展。

【讨论】(国家教师资格证考试·数学学科知识与教学能力(高级中学)2017年下半年第15题)数学的产生与发展过程蕴含着丰富的数学文化。

(1)以“导数”教学为例,说明在数学教学中如何渗透数学文化。

(2)阐述数学文化对学生数学学习的作用。

解析

(1)数学文化的狭义定义是:数学的思想、精神、方法、观点、语言,及其形成和发展。广义定义是:数学发展中的人文成分,数学与社会的关系、数学与文化的关系等。①数学史的渗透。导数是一个新概念,教师可以告诉学生导数的由来、发展和在实际生活中的作用,调动其学习积极性。②数学思想方法的渗透。首先是极限思想的渗透,主要体现在函数的连续性和定积分等内容上。其次是数形结合思想的渗透,主要体现在图象的分析与解析式的求证上。③理性思维方式的渗透。主要有两种:观察法,从三个不同维度引导学生观察导数的概念、运算和应用之间关系;归纳法,主要体现在当 $x \rightarrow 0$ 时极限的运算上。

(2)①有利于激发学生的学习兴趣。数学文化既包括数学命题、数学方法、数学问题和数学语言等,还包括数学思想、数学意识、数学精神等。在教学中可以通过数学家的故事、数学问题的发现等激发学生的学习兴趣。②有利于培养学生的创新意识和探索精神。数学文化中的历史事件、历史过程、历史故事等都能够激发学生的创新意识,培养学生的探索精神。③有利于培养学生的应用意识。数学源于生活,其理论的核心部分都是在人类社会的生产、生活实践中发展起来的。教学中应当有意识地结合学生已有的知识结构,加强数学与生活的联系,让学生感受到生活中处处都要用到数学,从而深切地体验数学文化的价值。

第八节 国际视野下的中国数学教育改革

一、美国《州立共同核心课程标准——数学》(CCSSM)的八条实践标准

2010年,为了改革数学和英语两科的教学,美国颁布了“州立共同核心课程标准”(Common Core State Standards,简称CCSS)。这标志着美国各州的数学教学内容走向统一的开始。其中,《州立共同核心课程标准——数学》(CCSSM)提出了8条实践标准,描述了所有年级学生在学习中为确保深刻理解数学知识应具备的思维过程或态度倾向。这8条实践标准如下。

(1) 理解问题,并坚持不懈地解决问题(make sense of problems and persevere in solving them)。学生应能够理解问题的背景和要求,并且在解决问题的过程中表现出坚持不懈的精神。这包括分析问题、制定解决方案、验证答案的合理性等步骤。

(2) 抽象且量化地进行数学推理(reason abstractly and quantitatively)。学生应能够将实际问题抽象为数学模型,并进行量化分析。这意味着能够在具体情境中识别出数学关系,并将其转化为符号表示,以便进行计算和推理。

(3) 构建可行的论断,质疑他人的推理(construct viable arguments and critique the reasoning of others)。学生应能够构建合理的数学论证,并能够批判性地评估他人的数学论点。这包括使用逻辑推理、证据支持和清晰表达自己的观点。

(4) 数学建模(model with mathematics)。学生应能够应用数学概念和方法来解决现实生活中的问题。这包括选择合适的数学工具和方法,构建数学模型,并解释模型的结果。

(5) 策略性使用适当工具(use appropriate tools strategically)。学生应能够选择并使用适当的数学工具(如计算器、计算机软件、尺规等)来辅助解决问题。这包括了解各种工具的优势和局限性,并能根据问题的需要灵活运用。

(6) 注意精确性(attend to precision)。学生应注重数学表达和计算的精确性。这包括正确使用数学符号、术语和单位,以及在计算过程中保持高度的准确性。

(7) 探求并利用结构(look for and make use of structure)。学生应能够识别数学问题中的模式和结构,并利用这些结构来简化问题和推导结论。这包括发现规律、归纳总结和应用已知的数学原理。

(8) 在重复推理中,寻找并表达规律(look for and express regularity in repeated reasoning)。学生应能够通过观察和实验发现数学规律,并能用数学语言清晰地表达这些规律。这包括归纳推理、演绎推理和类比推理等方法。

二、未来十年中国数学教育展望

未来十年,中国数学教育需要思考以下问题:

- 历史经验如何吸取？杜威的思想、大纲的制定等，都需要反思。
- 课程改革如何深化？矩阵的增加、二次曲线的删减、向量进入初中等，需要调查。
- “四基”如何落实？基本活动经验的界定、“四基”与核心素养的关系等，需要研究。
- 教育数学如何开展？数学教学内容知识(MPCK)、数学教学知识(MKT)，需要建设。
- 应试教育弊端如何规避？试卷“八股化”、刷题“占便宜”等，需要破解。
- 本土教育创造如何传承？中国数学课堂教学五大特征、熟能生巧等，需要发展。
- 英才教育缺失如何补救？美国 AP 课程、双学分课程等，需要借鉴。
- 跨学科融合如何实现？数学与其他学科(如物理、计算机科学、金融等)的交叉应用，需要重视。
- 数学教育技术如何发展？信息技术与课程教学整合、数字化素养等，需要强化。
- 中国数学教育如何走向国际化？中国样例、国际交流，需要关注。

阅读推荐

克莱因. 高观点下的初等数学(第一卷、第二卷)[M]. 舒湘芹, 等译. 上海: 复旦大学出版社, 2008.

思考练习

1. 用思维导图阐述你对数学教育发展简史的认识。
2. 数学与数学教育存在怎样的关系？
3. 20 世纪数学观的发展有何特点？在数学教学中如何体现这些特点？
4. 20 世纪我国数学教学观有哪些重要变化？

第二章 原理：数学教育的基本原理

内容概要

1. 弗赖登塔尔的数学教育理论；
2. 波利亚的解题理论；
3. 皮亚杰的建构主义学说。
4. 我国的“双基”教育道路。

第一节 弗赖登塔尔的数学教育理论

弗赖登塔尔的数学教育思想建立在对数学本质的深刻理解之上，强调数学的“动态性”和“实践性”，而非静态的知识体系。其核心观点可概括为“现实数学教育”理论，具有 5 个主要特征：

- (1) 情境问题是教学的平台。
- (2) 数学化是数学教育的目标。
- (3) 学生通过自己努力得到的结论和创造是教育内容的一部分。
- (4) “互动”是主要的学习方式。
- (5) 学科交织是数学教育内容的呈现方式。

这些特征又可以用三个关键词来概括，即现实、数学化、再创造。

一、现实

弗赖登塔尔所说的“现实”首先指每个学生当下的“数学现实”(mathematical reality)，即学习者已有的知识储备、生活经验、思维方式和对世界的认知水平。其次还隐含着

人物介绍



弗赖登塔尔

对数学本质的理解,即数学不是孤立的符号游戏,而是与现实世界紧密关联的“工具”和“思维方式”。

弗赖登塔尔的“现实”本质上是“让数学学习对学习者的而言是可接入、有意义、能关联的”——它既是学生构建数学知识的起点(基于已有经验),也是数学知识应用的终点(回归问题解决),更是避免数学教育陷入“形式化、抽象化”的关键。

弗赖登塔尔的“现实”作为其数学教育思想的核心概念,并非随意选择的情境或经验,而是需要遵循一系列原则,以确保其能有效支撑“数学化”过程(即从现实到数学的抽象与应用),并真正促进学习者对数学的理解。这些原则可归纳为以下4个核心维度。

1. 贴近性原则:与学习者的认知经验直接关联

“现实”必须贴近学习者当下的生活经验、知识储备和思维水平,成为他们“跳一跳能够到”的认知起点,而非遥不可及的抽象或陌生情境。

2. 问题性原则:蕴含可探究的数学矛盾或需求

“现实”不能是单纯的“情境展示”,而必须包含需要用数学方法解决的问题或矛盾,驱动学习者主动思考“如何用数学描述、分析或解决它”。

3. 发展性原则:随学习者认知水平动态拓展

“现实”不是固定不变的,而应随学习者的数学能力提升而逐步“升级”,从具体到抽象、从生活到数学内部,形成与认知发展同步的“现实进阶”。

4. 可数学化原则:能被抽象为数学概念或方法

“现实”必须具备“数学化潜力”,即情境中蕴含可被提炼、概括的数学要素(如数量、结构、关系、模式等),使学习者能通过观察、分析、归纳,将其转化为数学语言(符号、公式、模型等)。

二、数学化

弗赖登塔尔所说的“数学化”(Mathematization)是指学习者从自身“现实”(如生活经验、问题情境、已有知识)出发,通过观察、分析、抽象、概括等思维活动,将现实问题转化为数学形式(符号、概念、规律、模型等),并运用数学知识解决更复杂问题的过程。它强调数学不是“被传授的成品”,而是“被建构的过程”,学习者需要亲身经历数学的“诞生”与“应用”。

弗赖登塔尔所说的“数学化”可分为横向数学化和纵向数学化两个维度,二者相互关联,共同构成完整的数学学习路径。

1. 横向(水平)数学化:从“现实”到“数学符号”的转化

横向数学化是指将生活中的现实问题或具体情境,转化为数学语言(概念、符号、

关系等)的过程,核心是“把非数学的东西数学化”。

具体表现:

- 从“分糖”的情境中抽象出“除法”概念(如“10块糖分给2人,每人得几块”得到 $10 \div 2$)。
- 从“上学路线”的选择中提炼出“距离”“方向”等几何要素,并用坐标或图形表示。
- 从“温度变化”中抽象出“正数”“负数”的概念(如零上 5°C 记为+5,零下 3°C 记为-3)。

2. 纵向(垂直)数学化:从“数学符号”到“数学体系”的深化

纵向数学化是指对已有的数学符号、概念或方法进行进一步加工、整理、推广,构建更系统的数学知识体系的过程,核心是“把数学内部的东西更数学化”。

具体表现:

- 从“整数除法”(如 $10 \div 2$)延伸到“分数除法”(如 $10 \div 3 = \frac{10}{3}$),再到“小数除法”,逐步完善除法的运算规则。
- 从“具体几何图形”(如长方形、三角形)抽象出“多边形”概念,再推广到“平面图”“立体图形”,构建几何体系。
- 从“一次方程”(如 $2x + 3 = 7$)拓展到“ n 次方程”“方程组”,并总结方程求解的通性通法。

3. “数学化”全流程

弗赖登塔尔的“数学化”全过程如图2-1所示。

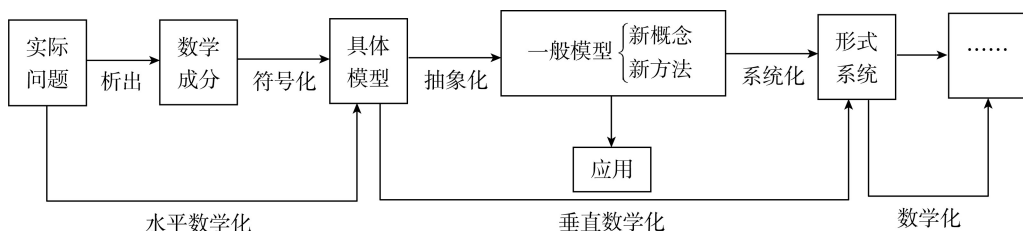


图 2-1 数学化基本流程图

【案例】“七桥问题”与“图论”

18世纪初,普鲁士首府柯尼斯堡市内有一条河,河里有两个小岛,有七座桥把两个小岛和河岸连接起来。一个游人能否不重复、不遗漏地一次走完七座桥,最后回到出发点?

欧拉对“七桥问题”的解答数学化过程如图2-2所示。

拾 遗



欧拉定理 F(一笔画的三条结论)

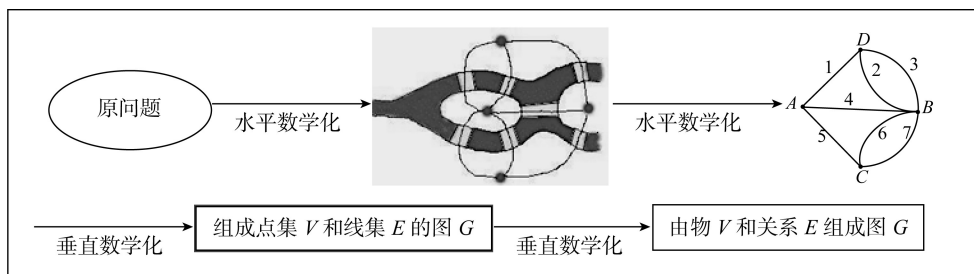


图 2-2 “七桥问题” 数学化过程

三、再创造

弗赖登塔尔的“再创造”(Reinvention)是其数学教育思想的核心原则之一，强调学习者不应被动接纳现成的数学知识，而应像数学家“创造数学”那样，亲身经历数学概念、规则、方法的“诞生过程”，通过自主探索、抽象、归纳，“重新创造”出数学知识。

弗赖登塔尔的“再创造”的本质是“对数学创造过程的模拟与重演”。

1. 数学学习是“创造”而非“接纳”

弗赖登塔尔认为，数学知识的“形式化表达”(如公式、定理、符号)是数学家创造的“结果”，但学习者若仅仅记忆这些结果，会割裂数学与现实的联系，无法理解其意义。例如，直接告诉学生“三角形内角和是 180° ”，不如让他们通过“剪拼三个角”“测量不同三角形”等方式，自主发现这一规律。后者就是“再创造”，学习者通过类似数学家的探索过程，理解结论的来源。

2. “再创造”基于学习者的“现实”

每个学习者的“现实”(生活经验、认知水平)不同，“再创造”的路径也不同。例如，学习“分数”时，低年级学生可能通过“分蛋糕”(把 1 块蛋糕分给 2 人，每人得“一半”)，创造出“ $\frac{1}{2}$ ”的表达；高年级学生可能通过“除法运算”(1 $\div$ 2 无法用整数表示)，推导出分数的意义。

教师需要尊重这种差异，提供符合学生“现实”的情境，让他们从自己的起点出发“创造”知识。

3. “再创造”是“数学化”的具体体现

“再创造”与“数学化”紧密相连：横向数学化中，学习者从现实情境中“创造”出数学符号(如从“分东西”创造出“除法”)；纵向数学化中，通过对已有知识的加工，“创造”出新的规则(如从“整数加法”创造出“小数加法”)。整个过程是学习者主动建构数学体系的过程。

4. 教师的角色是“引导者”而非“灌输者”

教师不直接给出答案，而是通过设计问题、提供工具、搭建脚手架的方式，引导学习者自主探索。例如，学习“平行四边形面积”时，教师不直接讲“底 $\times$ 高”公式，而是让学生用“割补法”将平行四边形转化为长方形(已有知识)，通过观察两者的关系，自主“创造”出面积公式。教师的核心任务是“延迟判断”，鼓励学习者试错、表达思路，让“创造”自然发生。

【案例】梯形的面积计算

假设阶段：回忆长方形、平行四边形、三角形的面积计算，提炼平面图形面积计算的基本方法(割、补)、思想(划归转化)和思路(运动观点)。思考：能否迁移应用于梯形的面积计算？

实验阶段：师生互动，得到梯形面积的推导方法：①割的方法，将梯形分割成一个平行四边形和一个三角形等；②补的方法，将两个全等的梯形拼成一个平行四边形等；③转化思想，沿梯形对角线剪开转化为两个三角形；④运动观点，将梯形上底伸缩，寻找梯形、矩形、三角形面积的统一表示。

验证阶段：在上述策略下，分别得出梯形面积公式，进行对比。

四、现实、数学化、再创造的关系

弗赖登塔尔的“现实”“数学化”“再创造”并非孤立概念，而是构成其数学教育思想的有机整体(见图 2-3)：“现实”是数学学习的起点与源泉，确保学习的“意义性”(知识与生活、经验相连)；“数学化”是知识建构的核心路径，确保学习的“逻辑性”(从具体到抽象，从旧知跨越到新知)；“再创造”是实现数学化的根本方法，确保学习的“主动性”(学习者是知识的“建构者”而非“接受者”)。三者相互依存、相互推动，共同指向“让学习者真正理解数学本质”的教育目标。

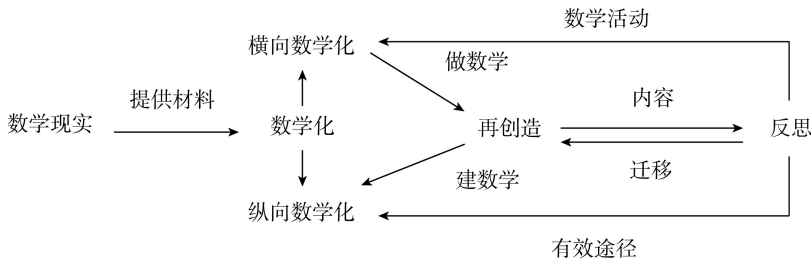


图 2-3 现实、数学化、再创造的关系图

【案例】以“中位数”教学设计为例，介绍弗赖登塔尔数学教育理论的实际应用

下面是一个常见的数学现实：在很多比赛中，组委会往往邀请多名评委进行评分。在决定某位选手最终成绩时，一般剔除一个最低分和一个最高分，再对剩下评分取平均值作为该选手最终得分。

我们对上述评分机制进行数学化：假设有 n 名评委，他们对某一位选手的评分分别为 $x_1, x_2, \dots, x_n (n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } n \geq 3, \text{ 不妨设 } x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n)$ 。去掉最低分 x_1 与最高分 x_n ，剩余评分为 $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ ，则该选手最终成绩为 $\frac{1}{n-2} \sum_{i=2}^{n-1} x_i$ 。

再创造：若改变评分规则，要求在去掉一个最低分和一个最高分的基础上，再去掉一个最低分与一个最高分，然后对剩下 $n-4$ 个评分取平均分作为最终成绩，又该怎样计算呢？若进一步拓展，去掉三个甚至更多个最低分与最高分，情况又是怎样呢？显然，只需要将 n 个评分从小到大进行排列，然后按要求分别去掉头尾几个评分，求剩余中间评分的平均数即可。这时，学生自然会产生联想，最多可以分别去掉头尾几个数呢？容易发现，当 n 为偶数时，若分别去掉头尾 $\frac{n}{2}$ 个数，则无剩余数，于是将无法算出最终得分，所以最多可以分别去掉头尾 $\frac{n-2}{2}$ 个数，最终剩余最中间两个数，取它们的平均数即可；当 n 为奇数时，若头尾分别去掉 $\frac{n-1}{2}$ 个数，则剩余该数列最中间一个数，此数即为选手最终成绩。

第二节 波利亚的数学解题理论

波利亚解题理论的核心是将解题过程系统化、步骤化，强调解题过程中的思维活动和策略运用。该理论是建立在其数学教育观上的。

人物介绍



波利亚

一、波利亚的数学教育观

波利亚的数学教育观，概括起来是“两个基点、三条原则”。

1. 两个基点

(1) 关于数学科学的认识：数学具有二重性，既是欧几里得式的演绎科学，又是一门实验性的归纳科学。

(2) 关于数学学习的认识：生物的发生律(也称重演律，即生物个体发育是系统发育的简短而迅速的重演)可以运用于数学教学与智力开发，重视数学认知的“重演”逻辑——从具体到抽象，强化知识关联的系统思维——从“孤立知识点”到“知识进化链”。

2. 三条原则

(1) 主动学习原则。波利亚认为，学习任何知识的最佳途径是自己去发现，因为这种发现理解最深刻，也最容易掌握其中的规律、性质和联系。

(2) 最佳动机原则。波利亚强调，数学教学的首要任务是激发学生的学习动机和

兴趣。教师应该创设问题情境，激发学生的求知欲和学习积极性。

(3) 循序渐进原则。波利亚指出，学习过程是一个由探索，到阐明，再到吸收的循序渐进过程，应根据学生的年龄、认知水平和知识的难易程度，分阶段、按顺序进行教学。

二、波利亚的“怎样解题”表

为了回答“一个好的解法是如何想出来的”这个问题，波利亚专门研究了解题的思维过程，并把研究所得写成《怎样解题》一书。在书中，波利亚将寻找并发现解法的思维过程分解成5条建议和若干个具有启发性的问题，得到一张“怎样解题”表(见表2-1)，使解题的思维过程可视化。

表 2-1 波利亚的“怎样解题”表

序号	步骤	阶段目标	检查清单
1	弄清问题	第一，你必须理解题目	☐ 未知是什么？已知是什么？条件是什么？条件有可能满足吗？条件是否足以确定未知量？或者它是否不充分？或者多余？或者矛盾？ ☐ 画张图，引入适当的符号。 ☐ 把条件的各个部分分开，你能否把它们写出来？
2	拟订计划	第二，找出已知数与未知量之间的联系。如果找不到直接联系，你也许不得不考虑辅助问题	☐ 你以前见过它吗？或者你是否见过同样的问题而形式稍有不同？ ☐ 你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能有用的定理？ ☐ 观察未知量！并设想出一个你所熟悉的具有相同或相似未知量的问题。 ☐ 这里有一个与你现在的问题有关且已解决的问题。你能利用它吗？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了能利用它，你是否应该引入某些辅助元素？ ☐ 你能重新叙述这个问题吗？你还能以不同方式重新叙述它吗？ ☐ 回到定义去思考。 ☐ 如果你不能解决所提出的问题，可先解决某道有关的问题。你能否想到一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类似的问题？你能否解决这个问题的一部分？只保留条件的一部分而舍去其余部分，那么未知量可以确定到什么程度？它会怎样变化？你能从已知数据导出某些有用的东西吗？你能想到适于确定未知数的其他数据吗？你能改变未知量或已知数据，或者有必要的话，把两者都改变，以使新未知量和新数据彼此更接近吗？ ☐ 你是否用到了所有的已知数据？你用到全部的条件了吗？你是否考虑到了问题中的所有关键概念？
3	执行计划	第三，执行你的计划	☐ 实现你的解题方案，检查每一个步骤。 ☐ 你能否清楚地看出这个步骤是正确的？你能否证明这个步骤是正确的？
4	回顾	第四，检查已得到的解答	☐ 你能否检验这个结论？你能否用别的方法导出该结果？你能一眼看出它来吗？ ☐ 你能否在别的问题中利用这个结果或这种方法？

从本质上看，波利亚的“怎样解题”表可以压缩为表 2-2。

表 2-2 波利亚“怎样解题”表的简表

步骤	说明	属性
第一步：弄清问题	(1) 未知、已知、条件？ (2) 具体化(画图)、符号化	解题基础
第二步：拟订计划	(1) 类比联想； (2) 化归转化	解题程序
第三步：实现计划	(1) 数学思考； (2) 分步解决	解题策略
第四步：回顾总结	(1) 检验结果； (2) 延伸拓展	解题方法

三、案例分析

问题：设正四棱台的高为 h ，上、下底的边长分别为 a 和 b ，求正四棱台的体积 F 。

解析：我们通过弄清问题、拟订计划、实现计划、回顾总结等四步，来解答这道题。

第一，弄清问题。

问题 1：你要求解的是什么？

要求解的是几何体的体积，在解题思维中的位置，用一个单点 F 象征性地表示出来(见图 2-4)。

问题 2：你有些什么？

一方面是题目条件中给出的三个已知量 a ， b ， h ；另一方面是已学过的棱柱、棱锥的体积公式，并积累有求体积公式的初步经验。把已知的三个量添到图示处(见图 2-5)，就得到新添的三个点 a ， b ， h ；它们与 F 之间有一条鸿沟，象征问题尚未解决，我们的任务就是将未知量与已知量联系起来。

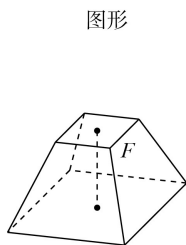


图 2-4 用一个单点象征性地表示

几何图示

F

图形

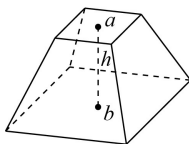


图 2-5 添加已知的三个量

几何图示

F

a h b

第二，拟订计划。

问题 3：怎样才能求得 F ？

由于我们已经知道棱柱、棱锥的体积公式，而棱台的几何结构(棱台的定义)告诉我们，棱台是“用一个平行于底面的平面去截棱锥”，从一个大棱锥中截去一个小棱

锥所生成的。如果知道了相应两个棱锥的体积 B 和 A ，就能求出棱台的体积

$$F = B - A \quad (2-1)$$

我们在图示上引进两个新的点 A 和 B ，用斜线把它们与 F 联结起来，以此表示三个量之间的联系(见图 2-6)。这就把求 F 转化为求 A 和 B 。

问题 4：怎样才能求得 A 和 B ？

依据棱锥的体积公式($V = \frac{1}{3}SH$)，底面积可由已知条件直接求得，关键是如何求出两个棱锥的高。并且，一旦求出小棱锥的高 x ，大棱锥的高也就求出，为 $x+h$ 。

我们在图示上引进一个新的点 x ，用斜线把 A 与 x ， a 联结起来，表示 A 能由 x 和 a 得出， $A = \frac{1}{3}a^2x$ ；类似地，用斜线把 B 与 b ， h ， x 联结起来，表示 B 可由 b ， h ， x 得出， $B = \frac{1}{3}b^2(x+h)$ (见图 2-7)，这就把求 A ， B 转化为求 x 。

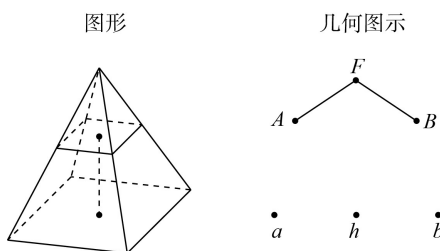


图 2-6 引入新点 A 和 B

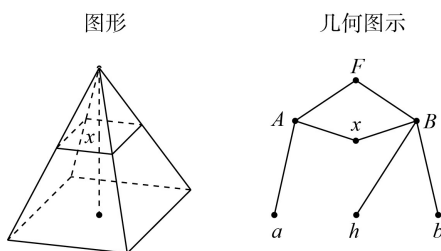


图 2-7 引入新点 x

问题 5：怎样才能求得 x ？

为使未知数 x 与已知数 a ， b ， h 联系起来，建立起一个等量关系，我们回顾处理立体几何问题的基本经验，进行“平面化”的思考。用一个通过高线以及底面一边上中点(图 2-8 中，点 Q)的平面去截两个棱锥，在这个截面上有两个相似三角形能把 a ， b ， h ， x 联系起来(转化为平面几何问题)，由 $\triangle VPM \sim \triangle VQN$ ，得

$$\frac{x}{x+h} = \frac{a}{b} \quad (2-2)$$

这就将一个几何问题最终转化为代数方程的求解，解以上方程，便可由 a ， b ， h 表示 x ，在图示中便可用斜线将 x 与 a ， b ， h 联结起来(见图 2-8)。至此，我们已在 F 与已知数 a ， b ， h 之间建立起一个不中断的联络网，解题思路全部贯通。

第三，实现计划。

作辅助线(过程略)，由相似三角形的性质，得

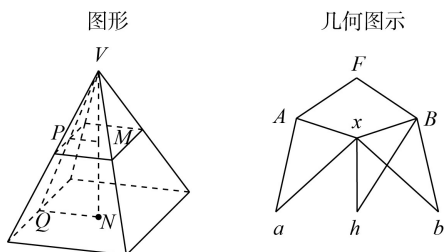


图 2-8 用斜线将 x 与 a ， b ， h 连接起来

$$\frac{x}{x+h} = \frac{a}{b}$$

解得

$$x = \frac{ah}{b-a}$$

进而得两锥体的体积为

$$A = \frac{1}{3}a^2x = \frac{a^3h}{3(b-a)}$$

$$B = \frac{1}{3}b^2(x+h) = \frac{b^3h}{3(b-a)}$$

得棱台体积为

$$F = B - A = \frac{(b^3 - a^3)h}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}h \quad (2-3)$$

第四，回顾总结。

(1) 正面检验每一步，推理是有效的，演算是准确的。再进行特殊性检验，令 $a \rightarrow 0$ ，由式(2-3)可得正四棱锥的体积公式；令 $a \rightarrow b$ ，由式(2-3)可得正四棱柱的体积公式。这既反映了新知识与原有知识的相容性，又加深了棱台体积公式的一般性；既沟通了三类几何体极限状态间的知识联系，又加深了三个体积公式之间联系的记忆。

(2) 回顾整个解题过程可看到，解题首先要弄清题意，从中捕捉有用的信息(如图 2-6 所示，有棱台， a, b, h, F 共 5 条信息)，同时要及时提取记忆网络中的有关信息(如棱台的定义、棱锥的体积公式、相似三角形的性质、反映几何结构的运算、求解立体几何问题的经验等 6 条信息)，并将两组信息资源进行合乎逻辑的有效组合。其中，起调控作用的关键是如何构思出一个成功的计划(包括解题策略)。由这一案例，解题者可以根据各自的知识经验领悟制订计划的普遍建议或模式。

(3) 在解题方法上，这个案例是分析法的一次成功应用。为了求 F ，只需求 A, B (由棱台体积到棱锥体积的转化——由未知到已知，化归)；为了求 A, B ，只需求 x (由体积计算到线段计算的转化——由复杂到简单，降维)；为了求 x ，只需建立关于 x 的方程(由几何到代数的转化——数形结合，联结)；最后，解方程求 x ，解题的思路就畅通了。当初各自孤立而空旷的画面上，形成了一个联结未知与已知间的不中断网络(见图 2-8)。书写过程只不过是循相反次序将网络图作一叙述。这个过程显示了分析与综合的关系，“分析先行，综合后继；分析是制订一个计划，综合是执行这个计划”。

(4) 在思维策略上，这个案例是“三层次解决”的一次成功应用。首先是一般性解决(策略水平上的解决)，把 F 转化为 A, B 的求解($F = B - A$)，明确了解题的总体方向；其次是功能性解决(方法水平上的解决)，发挥组合与分解、相似形、解方程等方法的解题功能；最后是特殊性解决(技能水平上的解决)，比如按照棱台的几何结构作

图、添加辅助线找出相似三角形、求出方程的解、具体演算体积公式等，实际完成推理步骤和运算细节。

(5) 在心理机制上，这个案例呈现出“激活——扩散”的数学思维基本过程。首先在正四棱台(条件)求体积(结论)的启发下，激活了记忆网络中棱锥的几何结构和棱锥的体积公式。然后，沿着体积计算的接线向外扩散，依次激活截面知识、相似三角形知识、解方程知识(见图 2-4~图 2-8)，直到条件与结论之间完全沟通。

(6) 在立体几何学科方法上，这是“组合与分解”的一次成功应用。首先把棱台补充(组合)为棱锥，然后把棱锥截成(分解)棱台并作出截面，这种做法在求棱锥体积时曾经用过(先组合成一个棱柱、再分解为三个棱锥)。它又一次向我们展示“能割善补”是解决立体几何问题的一个诀窍，而“平面化”的思考则是沟通立体几何与平面几何的一座重要桥梁。这些都可以用于求解其他立体几何问题，并且作为一般化的思想(化归、降维)还可以用于其他学科。

(7) “你能否用别的方法导出这个结果？”在信念上，我们应该始终坚定地给出肯定的回答！对于本例，按照化棱台为棱锥的相同思路，可以有下面的解法。

如图 2-9 所示，正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，联结 DA_1, DB_1, DC_1, DB ，将其分成三个四棱锥 $D-A_1B_1C_1D_1$ ， $D-AA_1B_1B$ ， $D-BB_1C_1C$ ，其中

$$V_{D-A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3}b^2h$$

$$V_{D-AA_1B_1B} = V_{D-BB_1C_1C} \text{ (等底等高)}$$

为了求 $V_{D-AA_1B_1B}$ ，可连接 AB_1 ，将其分为两个三棱锥 $D-ABB_1$ 与 $D-AA_1B_1$ (见图 2-10)。

$$\therefore S_{\triangle AA_1B_1} = \frac{b}{a} S_{\triangle ABB_1}$$

$$\therefore V_{D-AA_1B_1} = \frac{b}{a} V_{D-ABB_1}$$

$$\therefore V_{D-ABB_1} = V_{B_1-ABD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a^2 h = \frac{1}{6} a^2 h$$

$$\therefore V_{D-AA_1B_1B} = V_{D-ABB_1} + V_{D-AA_1B_1} = \frac{1}{6} a^2 h + \frac{b}{a} \times \frac{1}{6} a^2 h = \frac{a^2 + ab}{6} h$$

$$\begin{aligned} V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} &= V_{D-AA_1B_1B} + V_{D-BB_1C_1C} + V_{D-A_1B_1C_1D_1} \\ &= \frac{a^2 + ab}{6} h + \frac{a^2 + ab}{6} h + \frac{1}{3} b^2 h \\ &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} h \end{aligned} \quad (4)$$

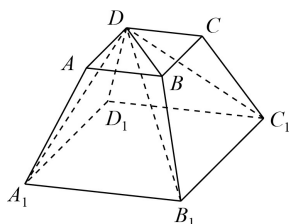


图 2-9 正四棱台

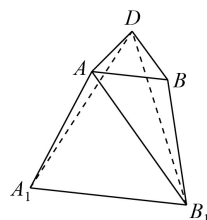


图 2-10 分为两个三棱锥

(8) “你能不能把这一结果或方法用于其他问题？”能！至少我们可以由正四棱台的体积公式一般化为棱台的体积公式(方法也一样)。注意到

$$a^2 = S_1, \quad b^2 = S_2, \quad ab = \sqrt{S_1 S_2} \quad (5)$$

可得到一般棱台的体积公式为

$$V_{\text{棱台}} = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)h \quad (6)$$

第三节 皮亚杰的建构主义学说

皮亚杰的建构主义学说颠覆了传统的“知识被动接受”观点，强调个体通过与环境的主互动来构建认知体系。

人物介绍



皮亚杰

一、认知建构的核心机制

皮亚杰提出了 4 个关键概念，解释个体如何构建知识。

(1) 图式(Schema)。图式是认知结构的基本单元，是个体对世界的“理解框架”或“行为模式”。它可以是简单的动作(如“抓握”)，也可以是复杂的概念(如“动物”“公平”)。

(2) 同化(Assimilation)。同化是将新信息纳入已有图式的过程，即个体用熟悉的方式理解新事物，不改变原有图式。

(3) 顺应(Accommodation)。当新信息无法被已有图式同化时，个体需要调整或重构原有图式以适应新经验，这一过程即顺应。顺应是认知发展的关键，它会改变原有认知结构。

(4) 平衡(Equilibration)。平衡是同化与顺应的动态协调状态。个体通过同化将新经验融入现有认知，当同化失效时，通过顺应调整图式，最终达到新的平衡。这一“不平衡→平衡”的循环，推动认知持续发展。

由此，建构主义者认为学习有两种方式：一是复制式(transcriptive，如同计算机通过程序来“学会”运算并输出结果一样)，二是建构式(constructive，同人体在感染某种病毒并与之作斗争的过程中逐步“学会”免疫功能一样)。